Machine Translated by Google

Интерполяция через Барицентрические координаты

Пьер Альбе

Инрия

Некоторые материалы от Д. Анисимова

Machine Translated by Google

Контур

• Барицентр •

Выпуклость •

Барицентрические координаты

- Для простых

– Для точечных

множеств • Обратное расстояние (Шепард) • Делоне/ Вороного • Естественные соседи (Сибсон)

– Для выпуклых многогранников

– Обобщенные барицентрические координаты

– Приложения

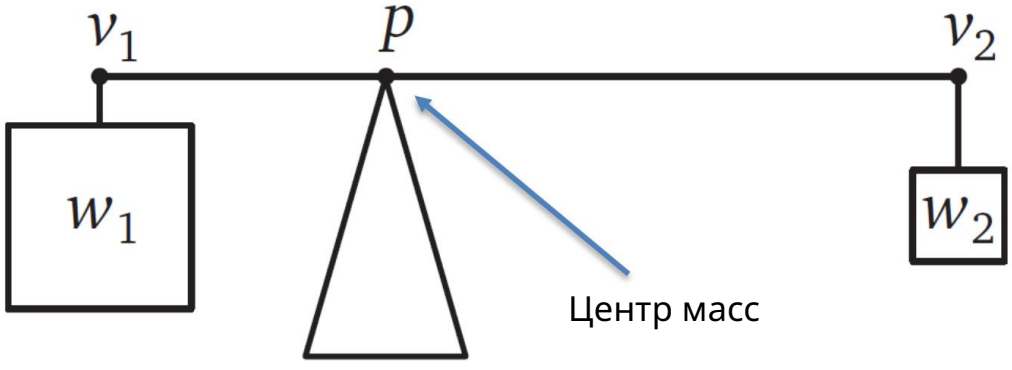
Machine Translated by Google

БАРИЦЕНТР

Machine Translated by Google

Барицентр

- Закон рычага: $w_1 l_1 = w_2 l_2$



$$l_1 = p - v_1$$

$$l_2 = v_2 - p$$

Machine Translated by Google

Барицентрические координаты

$$w_1(v_1 - p) + w_2(v_2 - p) = 0$$

$$w_1 v_1 + w_2 v_2 = W p$$

$$w_1 + w_2$$

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 = p$$

Machine Translated by Google

Противоположная проблема?

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 = p$$

?

Machine Translated by Google

Противоположная проблема

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 = p$$

л2 /л

л1 /л

уникальный!

Machine Translated by Google

ВЫПУКЛОСТЬ

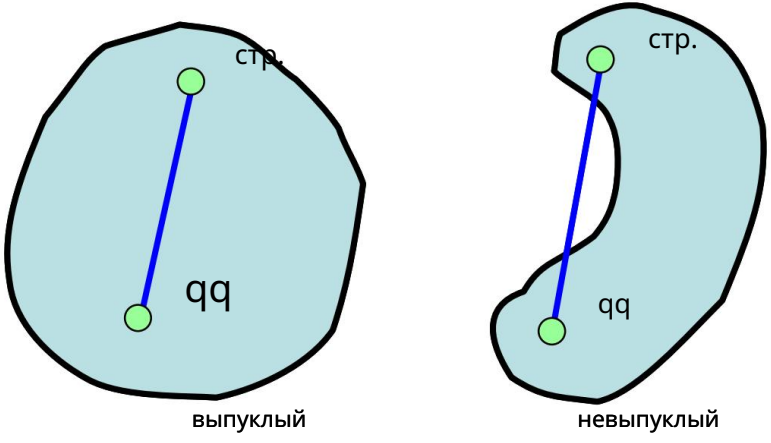
Machine Translated by Google

Выпуклость

Множество S называется выпуклым ,

если любая пара точек p,q S

удовлетворяет условию pq S.

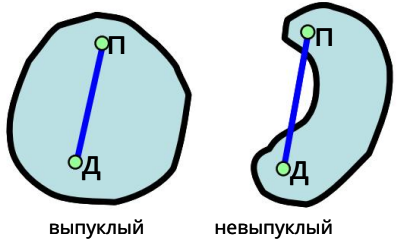


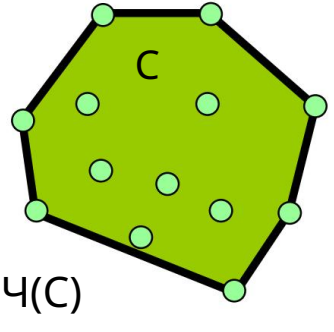
Machine Translated by Google

Выпуклая оболочка

- Выпуклая оболочка множества S — это:
  - Минимальное выпуклое множество, которое содержит S, т.е. любое выпуклое множество C такой, что S C удовлетворяет CH(S) C.
  - Пересечение всех выпуклых множеств, содержащих S.
  - Множество всех выпуклых комбинаций pi S , т.е. всех точек вида:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$





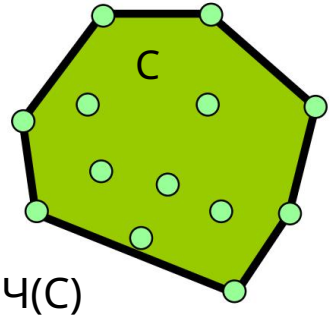
Machine Translated by Google

Выпуклые оболочки

Convex Hulls

•Выпуклая оболочка множества единственна с точностью до коллинеарностей.

•Граница выпуклой оболочки множества точек представляет собой многоугольник на подмножестве точек.



Machine Translated by Google

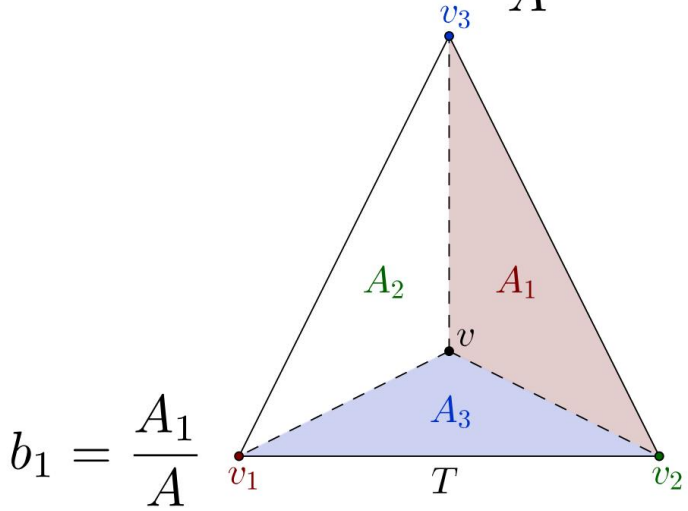
БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

ДЛЯ ПРОСТЫХ

Machine Translated by Google

Треугольные барицентрические координаты

$$b_3 = \frac{A_3}{A}$$



$$b_1 = \frac{A_1}{A} \qquad b_2 = \frac{A_2}{A}$$

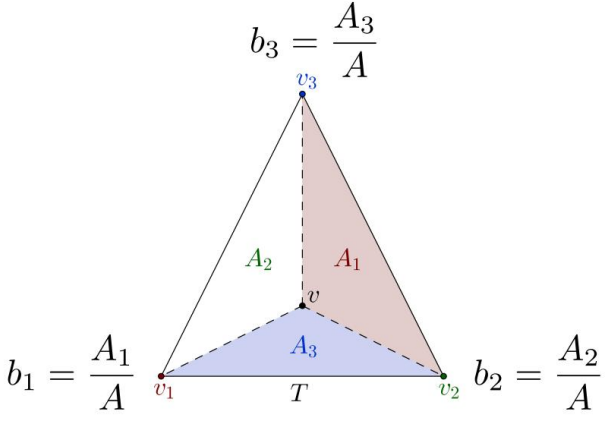
$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

А. Ф. Мёбиус

[1790 1868]

Machine Translated by Google

Треугольные барицентрические координаты



$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ if } i = j \\ 0 \text{ if } i \neq j \end{cases}$$

Характеристики:

Constant precision: $b_1 + b_2 + b_3 = 1$

Linear precision: $b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 = v$

The Lagrange property: $b_i(v_j) = \delta_{ij}$

Non-negativity: $b_i \geq 0$ for $i = 1, 2, 3$

Linearity along edges: $b_i = av + b$ for $v \in \partial T$

Smoothness: $b_i \in C^k, \ k > 0$

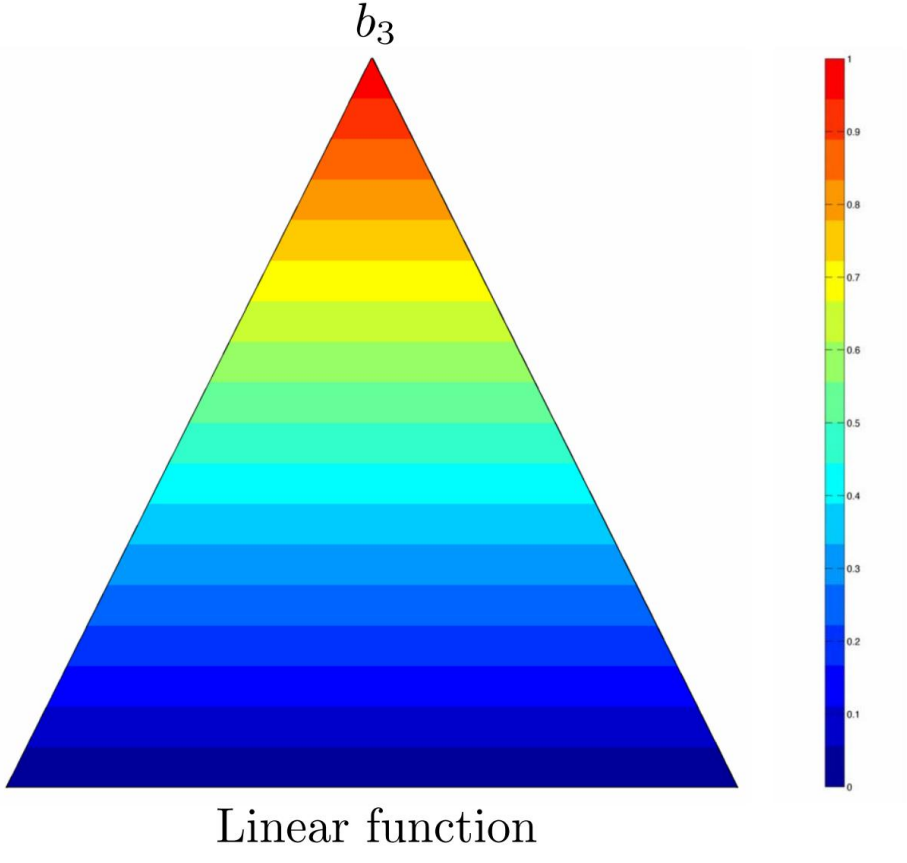
Closed-form: b_i are expressed in analytic form

Machine Translated by Google

Треугольные барицентрические координаты

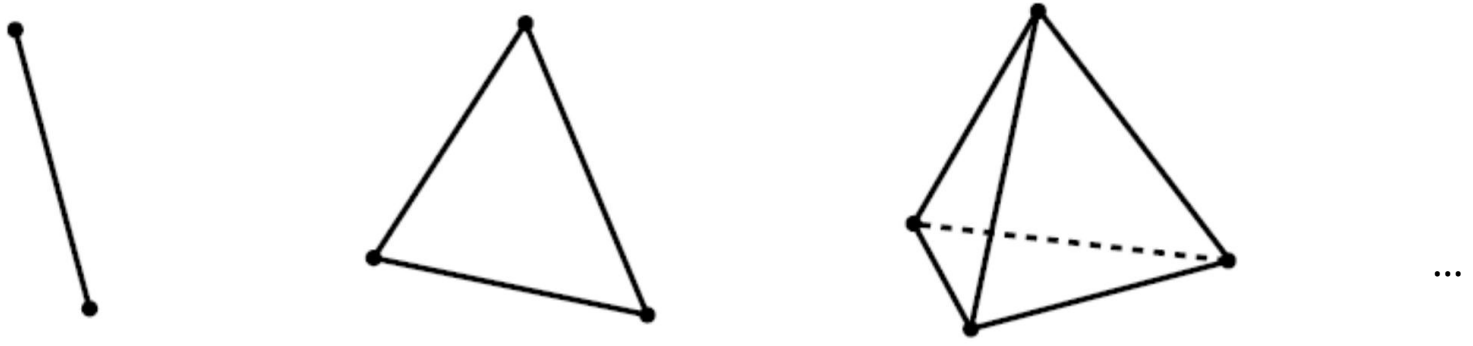
$$\sum_{i=1}^{d+1} b_i(\boldsymbol{p})\boldsymbol{v}_i$$

Интерполяция данных



Machine Translated by Google

Барицентрические координаты для симплексов



$$\sum_{i=1}^{d+1} b_i(\boldsymbol{p})\boldsymbol{v}_i$$

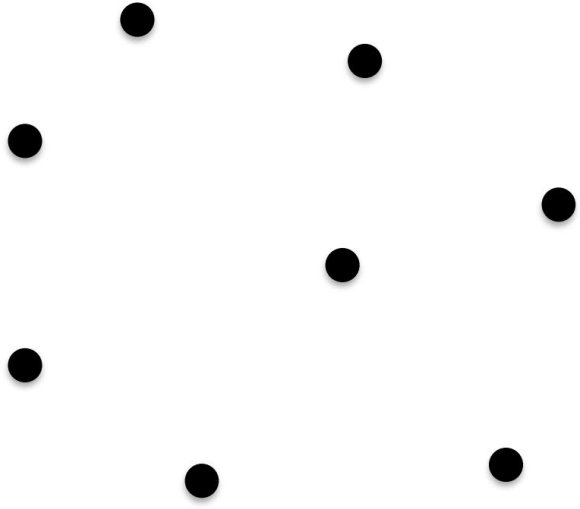
Machine Translated by Google

БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

ДЛЯ НАБОРОВ ТОЧЕК

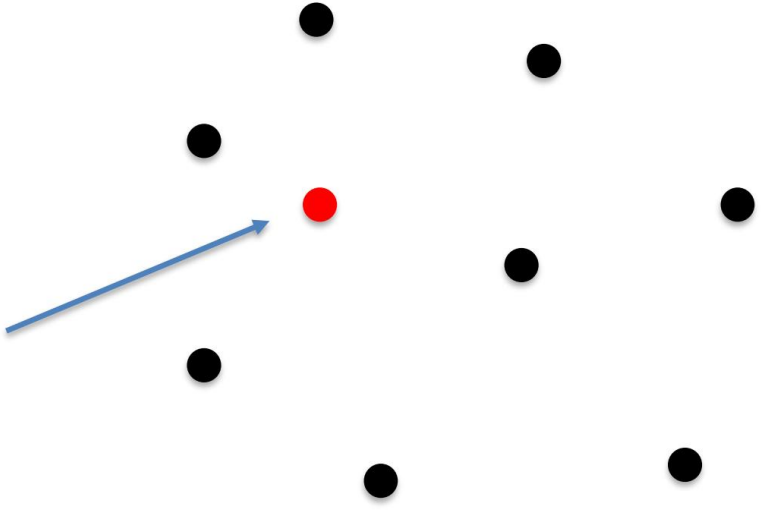
Machine Translated by Google

Точка Set



Machine Translated by Google

Барицентрические координаты?

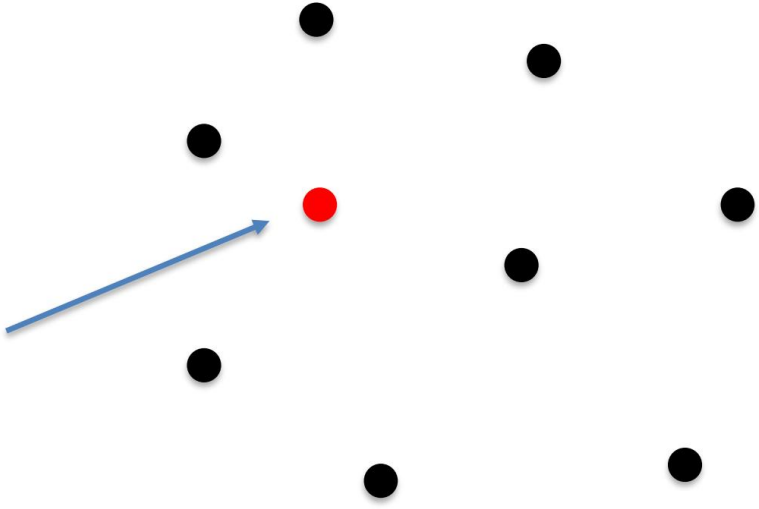


Веса такие , что он является барицентром множества точек?

Lagrange property: $b_i(v_j) = \delta_{ij}$

Machine Translated by Google

Барицентрические координаты?



Веса такие , что
он является
барицентром
множества
точек?

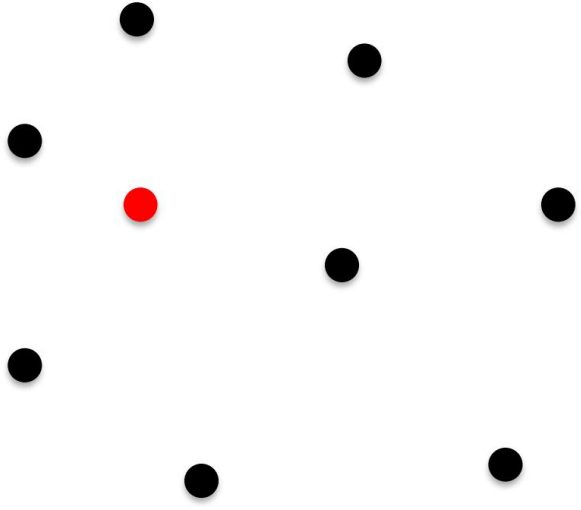
А.Ф. Мёбиус
[1790 1868]

Веса
всегда
существуют,
если #точек >= размернос

$$\text{Lagrange property: } b_i(v_j) = \delta_{ij}$$

Machine Translated by Google

Обратное расстояние [Шепард]

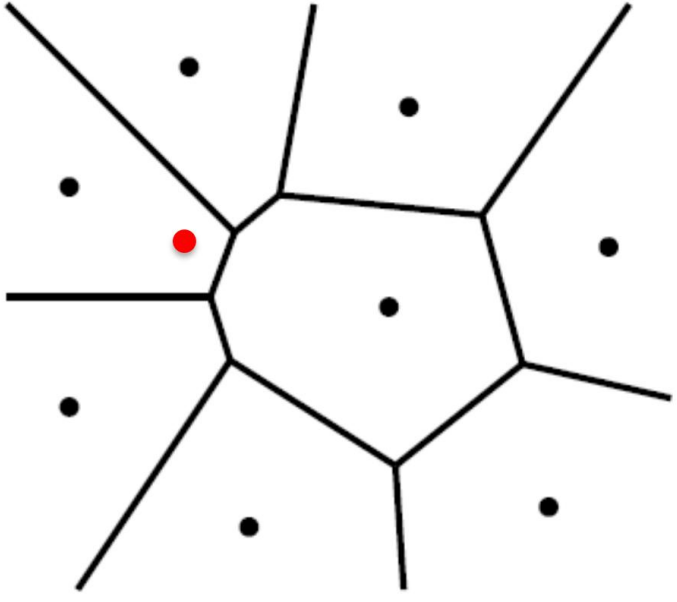


$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{N} w_i(\mathbf{x}) u_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i(\mathbf{x})}, & \text{if } d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \neq 0 \text{ for all } i \\ u_i, & \text{if } d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = 0 \text{ for some } i \end{cases}$$

$$w_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)^p}$$

Machine Translated by Google

Координаты естественного соседа [Сибсон]

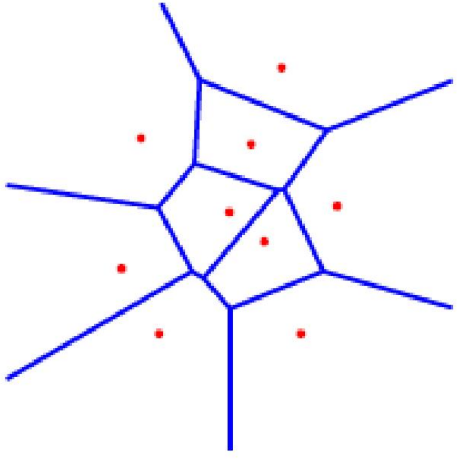


Machine Translated by Google

Диаграмма Вороного

Let $\mathcal{E} = \{\mathbf{p_1}, \ldots, \mathbf{p_n}\}$ be a set of points (so-called sites) in $\mathbb{R}^d$. We associate to each site $\mathbf{p_i}$ its Voronoi region $V(\mathbf{p_i})$ such that:

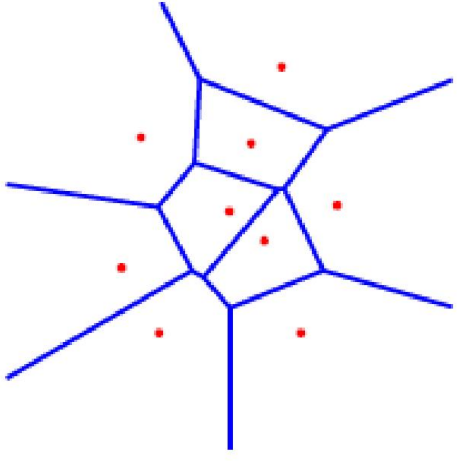
$$V(\mathbf{p_i}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x} - \mathbf{p_i}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{p_j}\|, \forall j \leq n\}.$$



Machine Translated by Google

Диаграмма Вороного

- Совокупность непустых областей Вороного и их граней вместе с их отношениями инцидентности образуют клеточный комплекс, называемый диаграммой Вороного E.
- Геометрическое место точек, которые равноудалены от двух точек pi и pj, называется биссектрисой, все биссектрисы являются аффинными подпространствами IRd (прямыми в 2D).

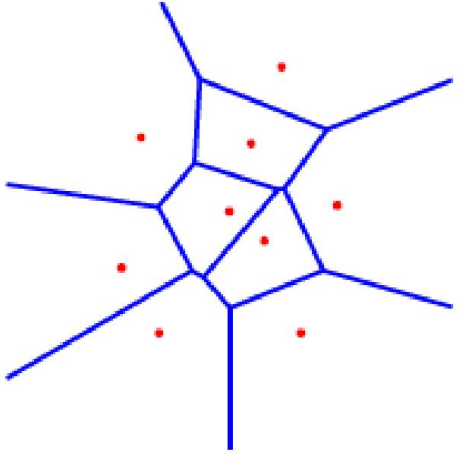


демо

Machine Translated by Google

Диаграмма Вороного

• Ячейка Вороного сайта pi определяется как пересечение замкнутых полупространств, ограниченных биссектрисами. Подразумевает: Все ячейки Вороного являются выпуклыми.

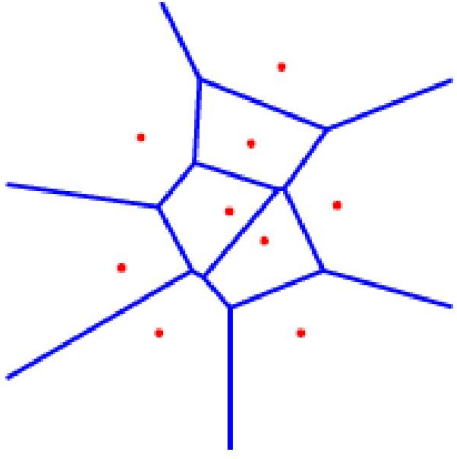


демо

Machine Translated by Google

Диаграмма Вороного

• Ячейки Вороного могут быть неограниченными с неограниченными биссектрисами.
Происходит, когда сайт pi находится на границе выпуклой оболочки E.

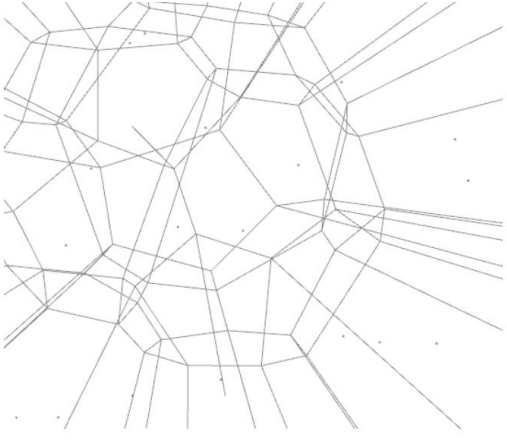


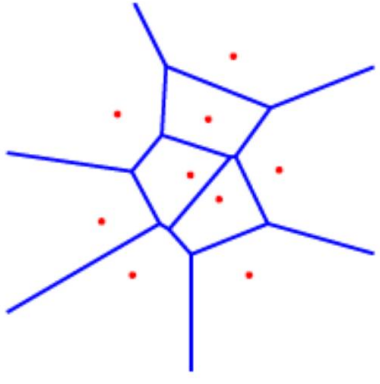
демо

Machine Translated by Google

Диаграмма Вороного

- Ячейки Вороного имеют грани разных размеров.
- В 2D грань размерности k представляет собой пересечение 3 - k ячеек Вороного. А Вершина Вороного в общем случае равноудалена от трех точек, а ребро Вороного равноудалено от двух точек.





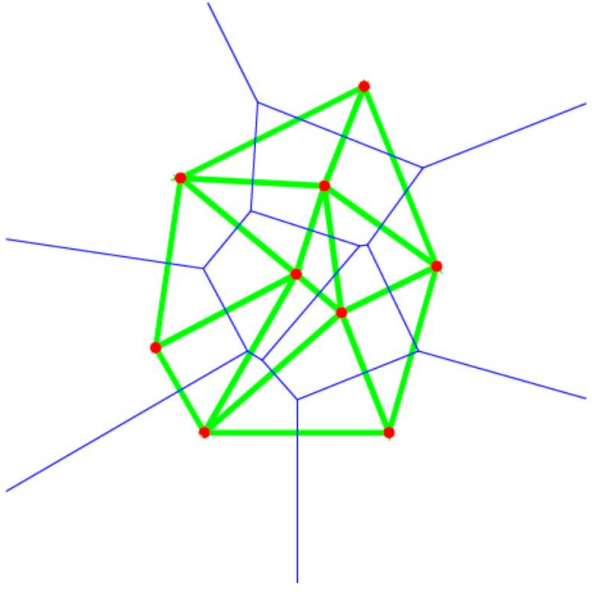
Machine Translated by Google

Триангуляция Делоне

•Двойственная структура диаграммы Вороного.

•Триангуляция Делоне множества сайтов E представляет собой симплициальный комплекс, такой что k+1 точек в E образуют симплекс Делоне, если Ячейки Вороного имеют непустое пересечение

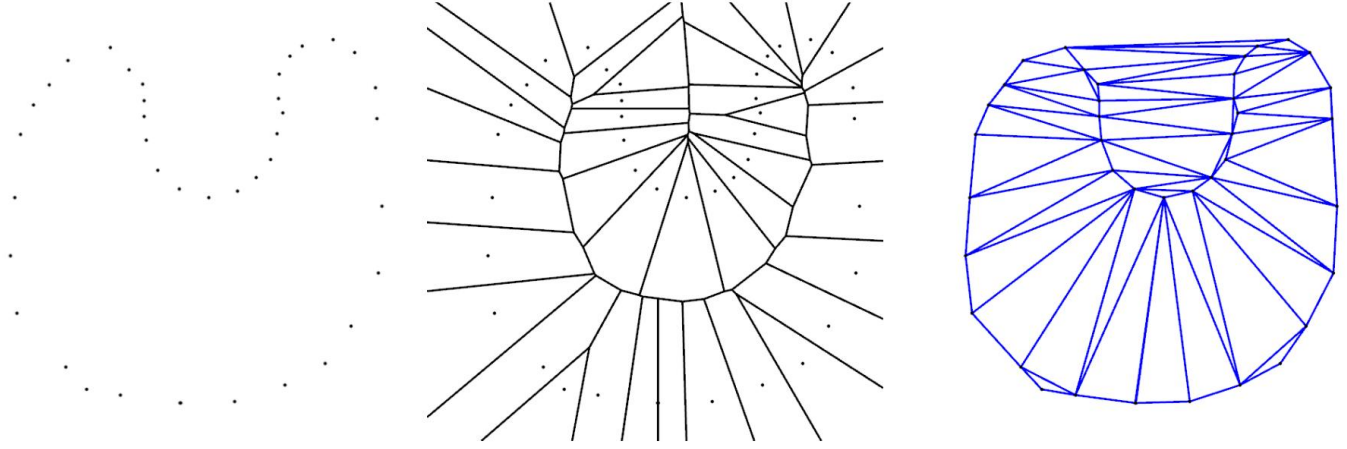
демо



Machine Translated by Google

Триангуляция Делоне

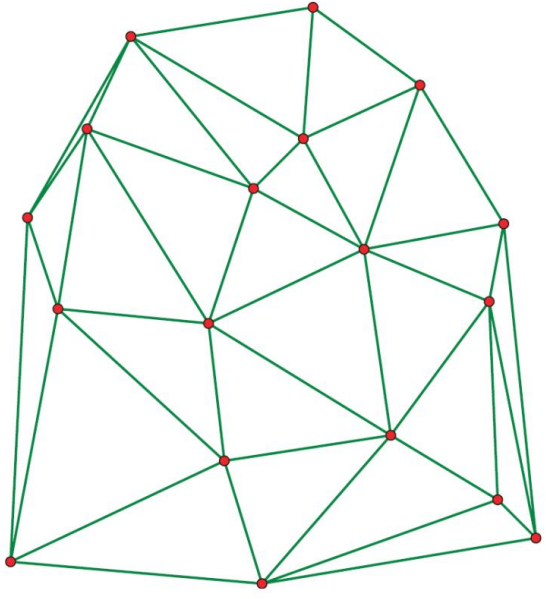
•Триангуляция Делоне множества точек E покрывает выпуклую оболочку E.

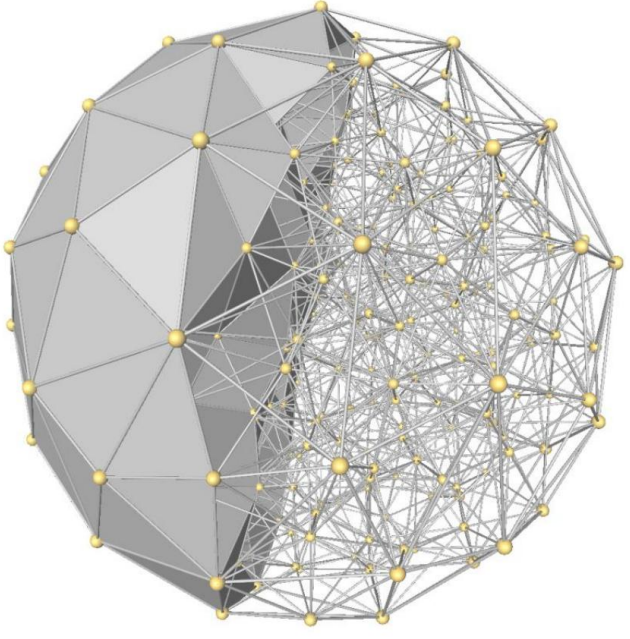


Machine Translated by Google

Триангуляция Делоне

•каноническая триангуляция, связанная с любым множеством точек

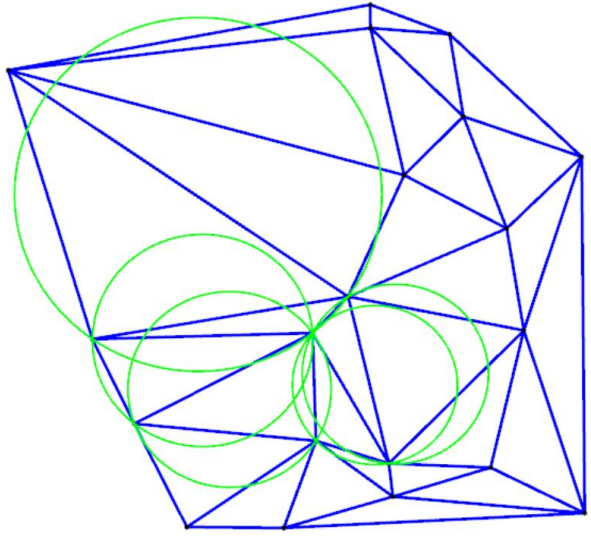




Machine Translated by Google

Триангуляция Делоне: Локальная собственность

•Пустой круг: триангуляция T множества точек E, такая, что любой d-симплекс T имеет описанную сферу, которая не охватывает ни одной точки E, является триангуляцией Делоне E. И наоборот, любой k-симплекс с вершинами в E, который может быть описан гиперсферой, которая не охватывает ни одной точки E, является гранью триангуляции Делоне E.



демо

Machine Translated by Google

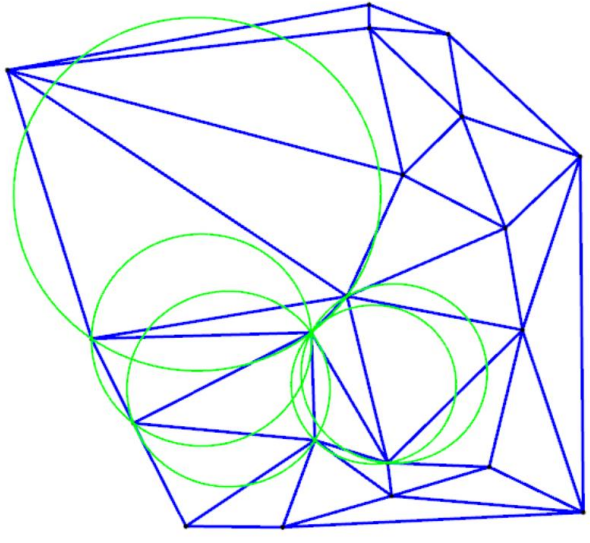
Наивный $O(n^4)$ Алгоритм построения

- Повторяйте до тех пор, пока это невозможно: Выберите тройку сайтов. Если окружность, проходящая через них, пуста и не содержит других сайтов, оставьте треугольник, вершины которого являются тройкой.

Machine Translated by Google

Наивный алгоритм?

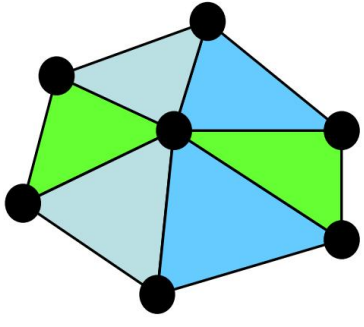
- Вход: набор точек
- Выход: треугольники Делоне



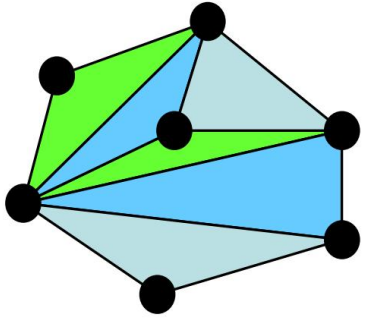
Machine Translated by Google

Триангуляция Делоне

- В 2D: «качественная» триангуляция
  - Наименьший угол треугольника: триангуляция Делоне множества точек E — это триангуляция E, которая максимизирует наименьший угол.
  - Еще сильнее: триангуляция E, угловой вектор которой максимален для лексикографического порядка, является триангуляцией Делоне E.



хороший

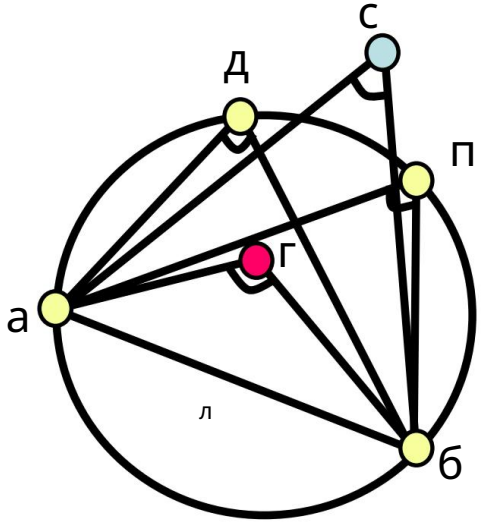


плохой

Machine Translated by Google

Триангуляция Делоне

•Теорема Фалеса: Пусть C — окружность, а l — прямая, пересекающая C в точках a и b. Пусть p, q, r и s — точки, лежащие по одну сторону от l, где p и q находятся на C, r — внутри C , а s — снаружи C. Тогда:



а рб 2 апб

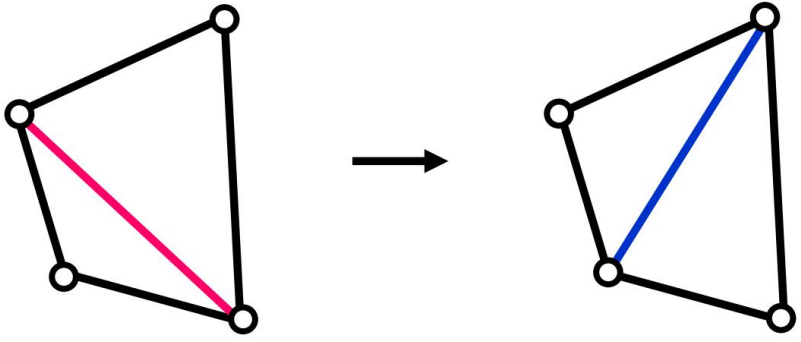
акб а сб

Machine Translated by Google

Алгоритм переворота рёбер

Улучшение триангуляции:

•В любом выпуклом четырехугольнике возможен переворот ребра . Если этот переворот улучшает триангуляцию локально, он также улучшает и глобальную триангуляцию.



•Если переворот ребра улучшает триангуляцию, первое ребро называется недопустимым.

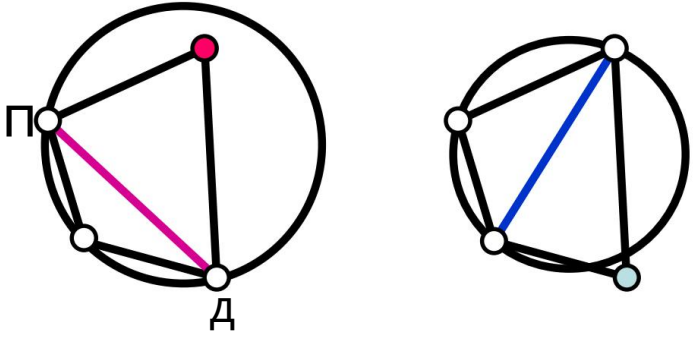
Machine Translated by Google

Триангуляция Делоне

Недопустимые края:

• Лемма: Ребро pq является недопустимым, если одна из его противоположных вершин находится внутри круга, определяемого тремя другими вершинами.

•Доказательство: по теореме Фалеса.



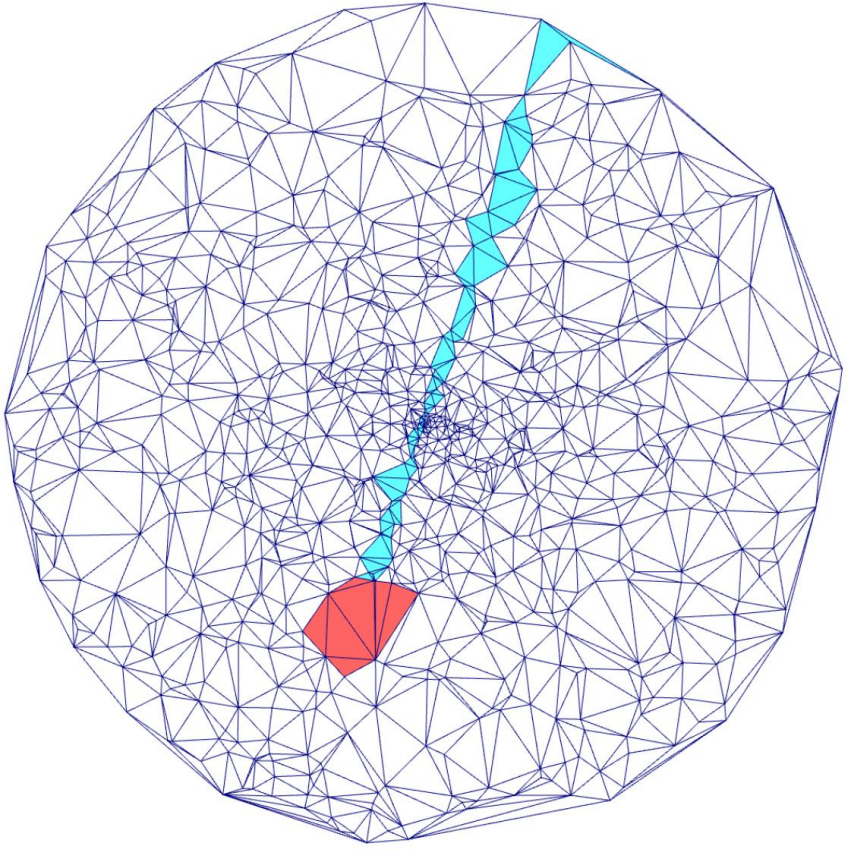
•Теорема: Триангуляция Делоне не содержит недопустимых ребер.

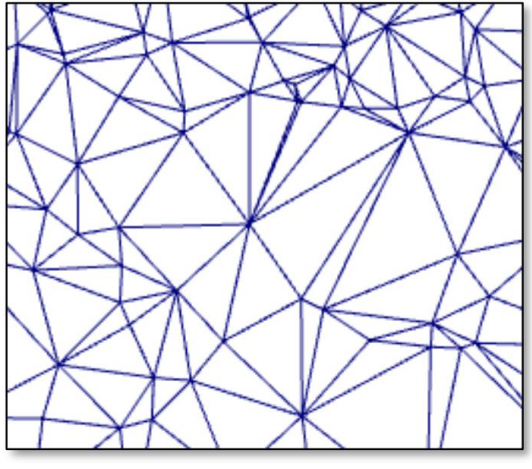
•Следствие: Треугольник является треугольником Делоне тогда и только тогда, когда окружность, проходящая через его вершины, пуста и не содержит других точек (условие пустого круга).

•Следствие: Триангуляция Делоне не является уникальной, если более трех участков являются сокруговыми.

Machine Translated by Google

Найдите и найдите звездную дыру





Machine Translated by Google

Теорема: Если a,b,c,d образуют выпуклый многоугольник CCW, то d лежит в окружности, определяемой a, b и c , тогда и только тогда:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_x^2+a_y^2 & 1 \\ b_x & b_y & b_x^2+b_y^2 & 1 \\ c_x & c_y & c_x^2+c_y^2 & 1 \\ d_x & d_y & d_x^2+d_y^2 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

Доказательство: Докажем, что равенство имеет место, если точки являются окружностями.

Существует центр q и радиус r такие, что:

$$(a_x - q_x)^2 + (a_y - q_y)^2 = r^2$$

и аналогично для b, c, d:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_x^2+a_y^2 & 1 \\ b_x & b_y & b_x^2+b_y^2 & 1 \\ c_x & c_y & c_x^2+c_y^2 & 1 \\ d_x & d_y & d_x^2+d_y^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_x^2+a_y^2 & 1 \\ b_x & b_y & b_x^2+b_y^2 & 1 \\ c_x & c_y & c_x^2+c_y^2 & 1 \\ d_x & d_y & d_x^2+d_y^2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -q_x & 0 \\ 0 & 1 & -q_y & 0 \\ -q_x & -q_y & q_x^2+q_y^2-r^2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Итак, эти четыре вектора линейно зависимы, следовательно, их det равен нулю.

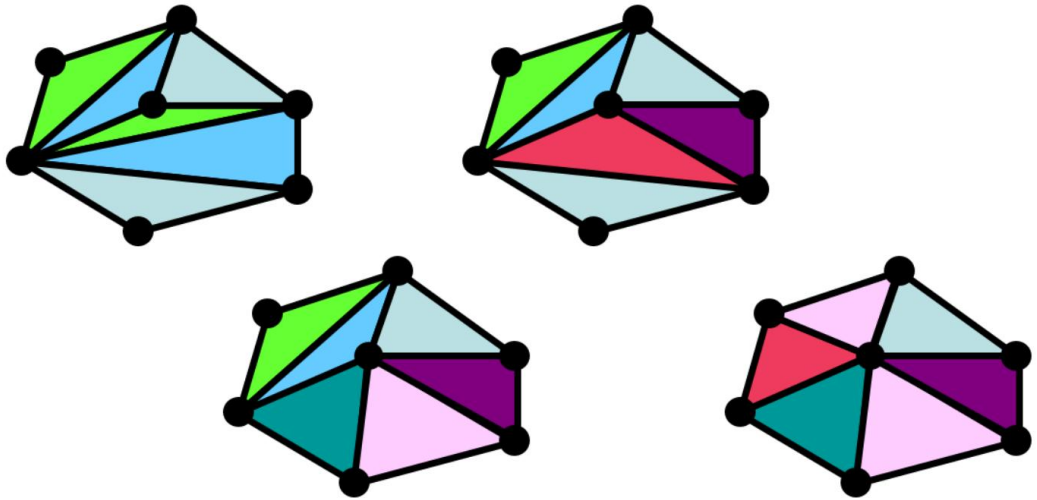
Следствие: d ∈ круг(a,b,c) тогда и только тогда, когда b ∈ круг(c,d,a) тогда и только тогда, когда c ∈ круг(d,a,b) тогда и только тогда, когда a ∈ круг(b,c,d)

Machine Translated by Google

Еще одна наивная конструкция:

- Начните с произвольной триангуляции. Переворачивайте любые незаконные ребра, пока не останется существуют и другие.
- Требует доказательства отсутствия локальных минимумов.

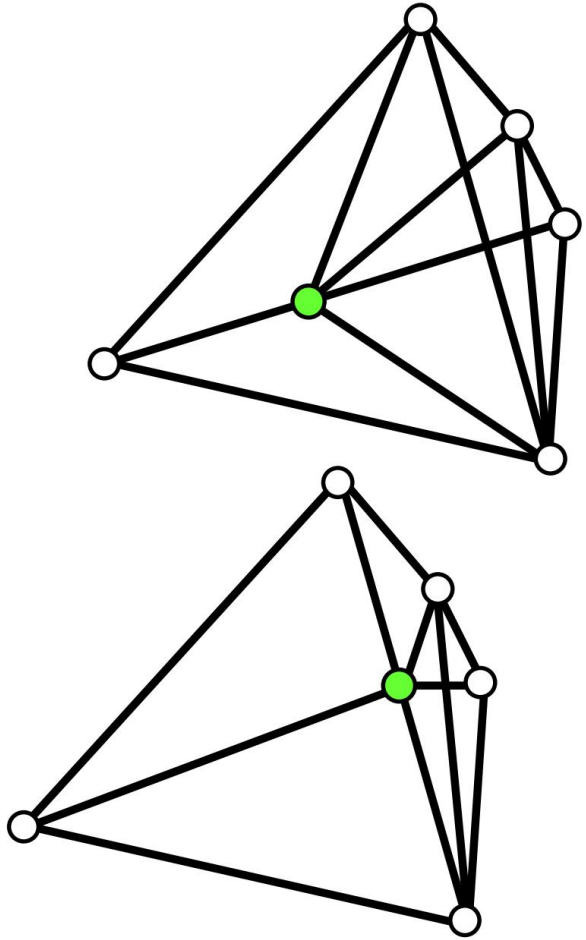
Может потребоваться много времени для завершения.



Machine Translated by Google

Инкрементный алгоритм:

- Образуйте ограничивающий треугольник, который охватывает все сайты.
- Добавляйте сайты один за другим в случайный порядок и обновление триангуляции.
- Если участок находится внутри существующего треугольника:
  - Соедините площадку с вершинами треугольника.
  - Проверить, можно ли выполнить «переворот» на одном из ребер треугольника. Если да, то рекурсивно проверить соседние ребра.
- Если участок находится на существующей границе:
  - Замените кромку четырьмя новыми кромками.
  - Проверить, можно ли выполнить «переворот» на одном из противоположных ребер. Если да, то рекурсивно проверить соседние ребра.



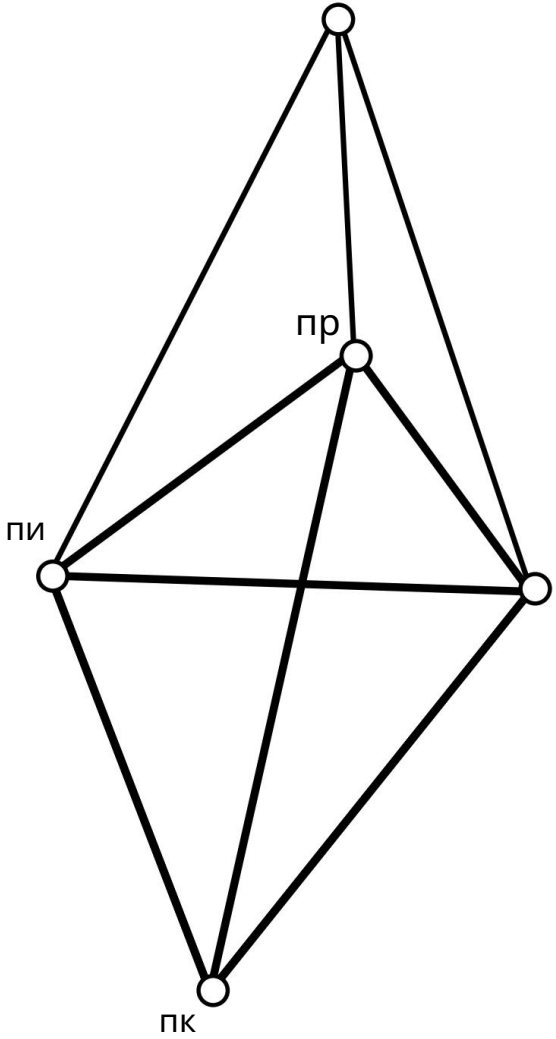
Machine Translated by Google

- Добавляется новая вершина pr , что приводит к созданию ребер.
- Проверяется допустимость ребра pipj (с противоположной вершиной) pk .

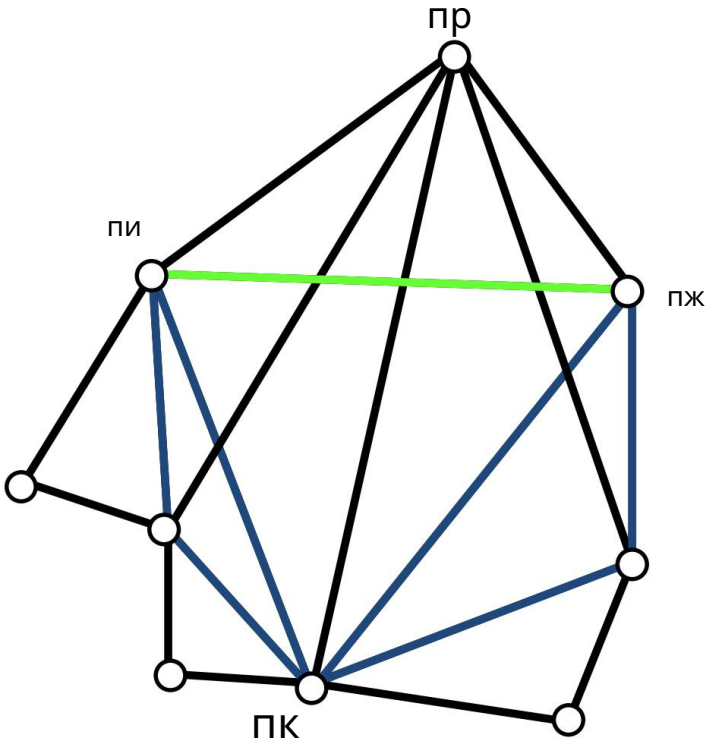
Если pipj недопустимо, выполняется переворот и рекурсивно проверяются ребра pipk и pj — новые ребра напротив pr . pk ,

Обратите внимание, что рекурсивный вызов pipk не может устранить ребро pr pk .

- Примечание: все перевороты ребер заменяют ребра напротив новой вершины на ребра, инцидентные ей!



Machine Translated by Google



Machine Translated by Google

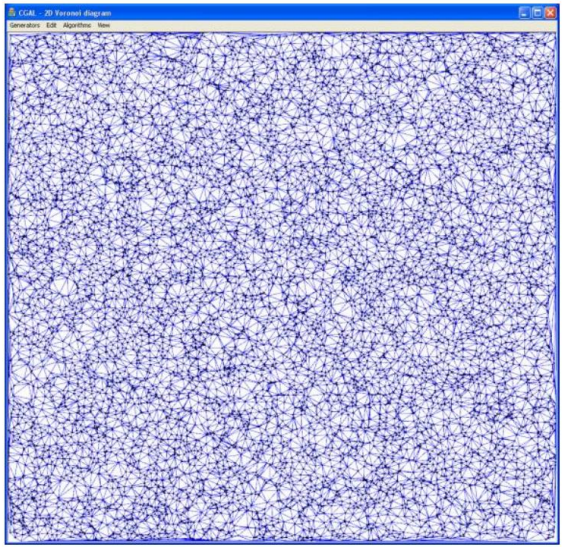
- Теорема: Ожидаемое число переворотов ребер, сделанных в ходе работы алгоритма (некоторые из которых также исчезают позже), не превышает 6n.
- Доказательство: Во время вставки вершины pi , ki new создаются ребра: 3 новых начальных ребра и ki - 3 из-за переворотов.

  Обратный анализ: E[ki] = ожидаемая степень числа pi после завершения вставки = 6 (Эйлер).

Machine Translated by Google

- Местоположение точки для каждой точки: O(log n) времени.
- Перевороты: (n) ожидаемое время в целом (для всех шагов).
- Общее ожидаемое время: O(n log n).

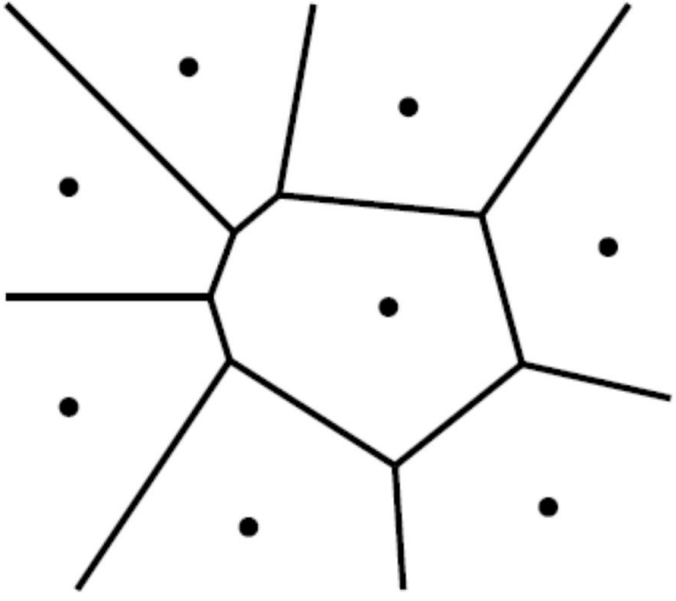
Пространство: (n).

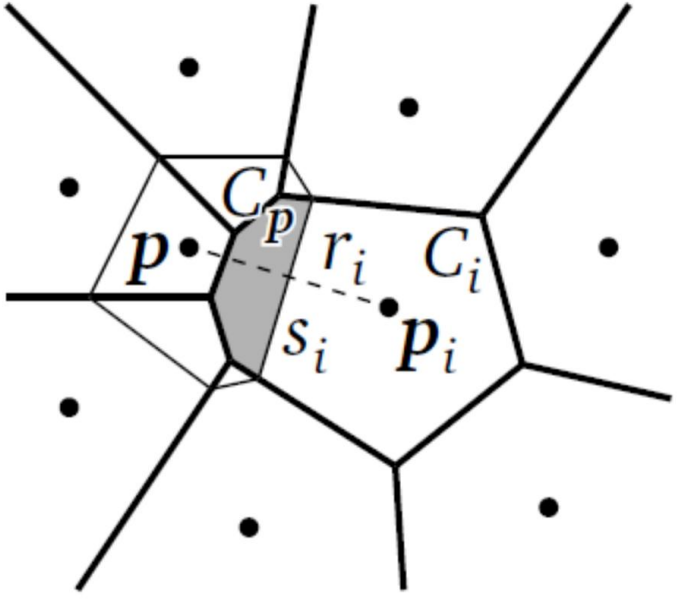


демо

Machine Translated by Google

Координаты Сибсона

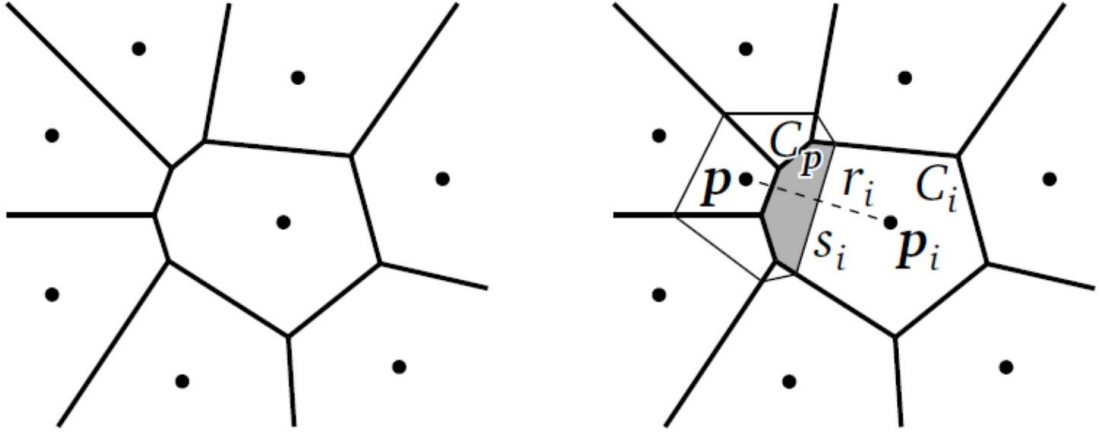




$$w_i = \text{Area}[C_i \cap C_{\boldsymbol{p}}], \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Machine Translated by Google

Координаты Сибсона



• Хорошо определено над выпуклой

оболочкой • Локальная

поддержка • Удовлетворяет свойству

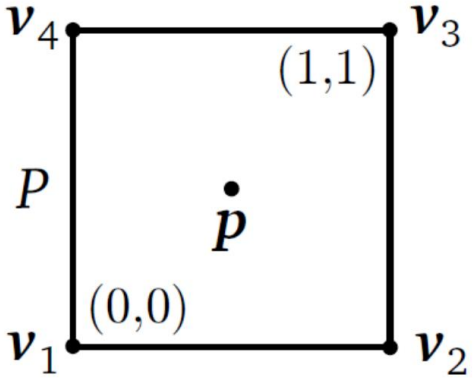
Лагранжа • Непрерывность C 1 , за исключением точек pi (только C0)

Machine Translated by Google

ОБОБЩЕННЫЙ
БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Machine Translated by Google

Четырехугольник?

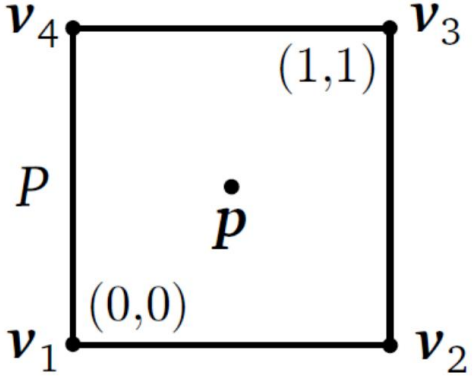


$$b_1(\boldsymbol{p}) = (1-s)(1-t), \quad b_2(\boldsymbol{p}) = s(1-t), \quad b_3(\boldsymbol{p}) = st, \quad b_4(\boldsymbol{p}) = (1-s)t$$

Билинейная интерполяция

Machine Translated by Google

Четырехугольник

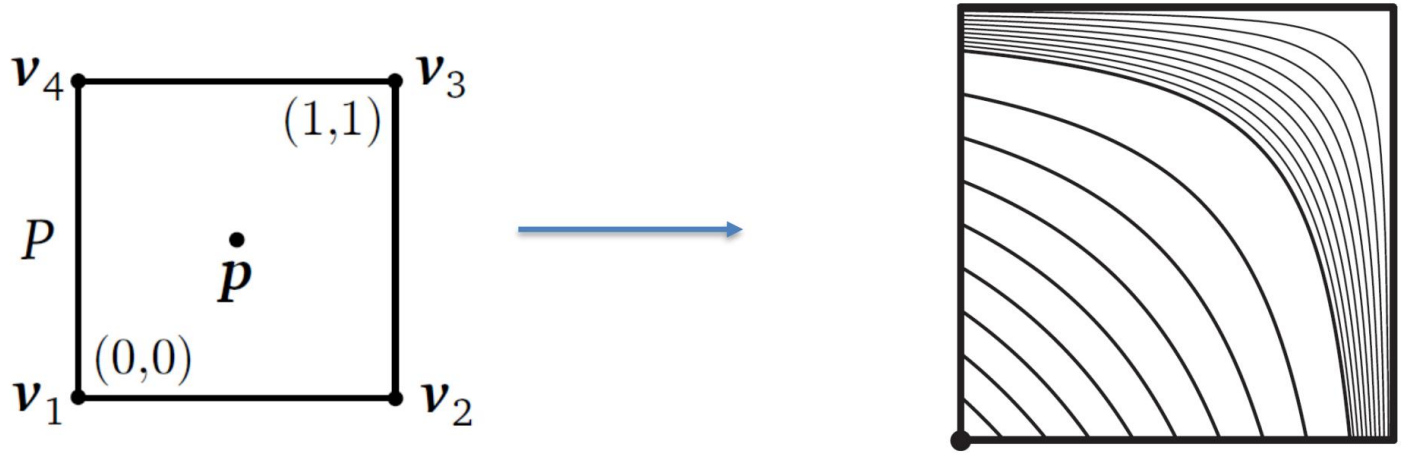


$$b_1(\boldsymbol{p}) = (1-s)(1-t), \quad b_2(\boldsymbol{p}) = s(1-t), \quad b_3(\boldsymbol{p}) = st, \quad b_4(\boldsymbol{p}) = (1-s)t$$

Билинейная карта на единичном квадрате

Machine Translated by Google

Четырехугольник

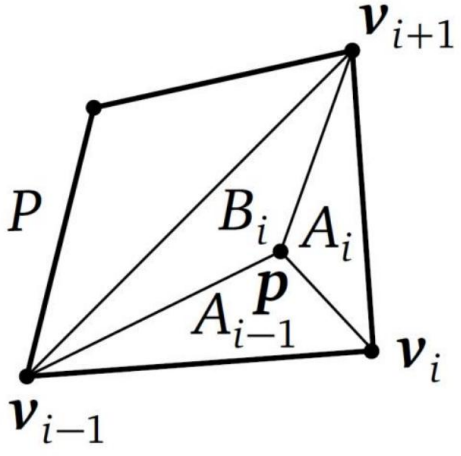


$$b_1(\boldsymbol{p}) = (1-s)(1-t), \quad b_2(\boldsymbol{p}) = s(1-t), \quad b_3(\boldsymbol{p}) = st, \quad b_4(\boldsymbol{p}) = (1-s)t$$

Изображение билинейной карты на единичном квадрате

Machine Translated by Google

Единая формула! [Floater]



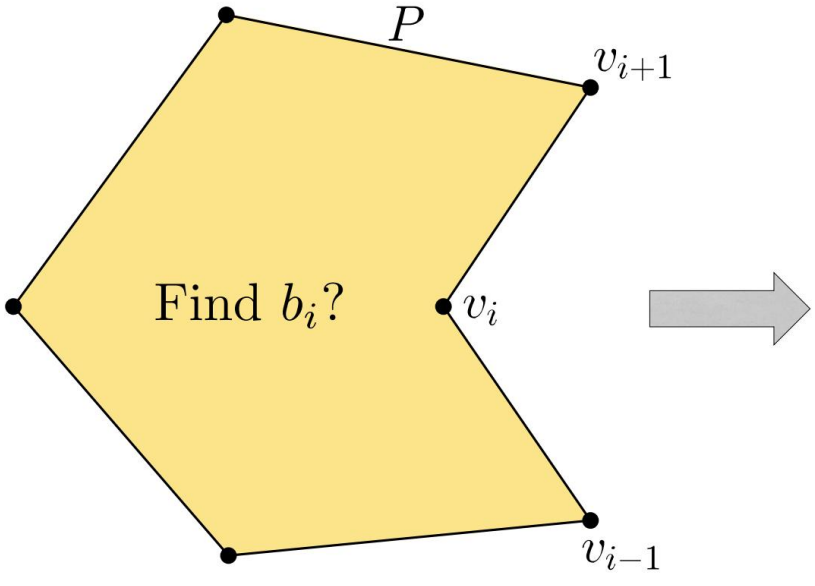
$$b_i(\boldsymbol{p}) = \frac{4A_{i+1}(\boldsymbol{p})A_{i+2}(\boldsymbol{p})}{G_{i+1}(\boldsymbol{p})G_{i+2}(\boldsymbol{p})}, \qquad i = 1, \ldots, 4$$

$$G_i = 2A_i - B_i - B_{i+1} + \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2A_1A_3 + 2A_2A_4},$$

подписанная область

Machine Translated by Google

Обобщенные барицентрические координаты

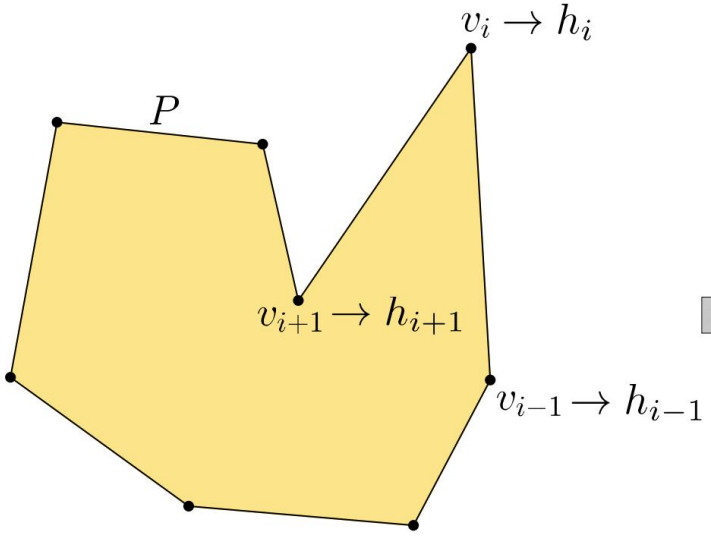


Характеристики:

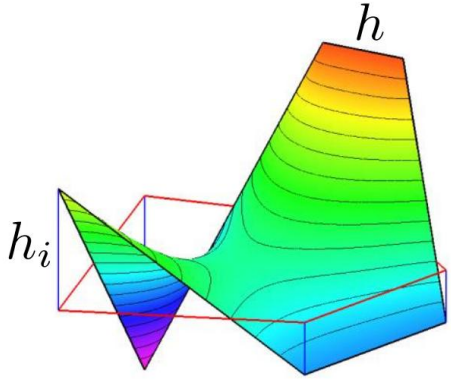
- Constant precision
- Linear precision
- The Lagrange property
- Non-negativity
- Linearity along edges
- Smoothness
- Closed-form

Machine Translated by Google

Интерполяция



$$\sum_{i=1}^{n} b_i h_i = h$$



Machine Translated by Google

$$b_i = \frac{w_i}{W}, \text{ where } W = \sum_{j=1}^{n} w_j$$

Разные веса -> разные функции координат

Machine Translated by Google

Обобщенные барицентрические координаты

• Координаты Вакспресса [Wachspress, 1975] •
Дискретные гармонические координаты [Pinkall и Polthier, 1993]
• Координаты среднего значения [Floater,
2003] • Метрические координаты [Malsch и
др., 2005] • Гармонические координаты [Joshi
и др., 2007] • Координаты максимальной энтропии [Hormann и
Sukumar, 2008] • Комплексные барицентрические
координаты [Weber и др., 2009] • Координаты наименьших квадратов
[Manson и Schaefer, 2010] • Координаты кубического
среднего значения [Li и Hu, 2013] • Координаты Пуассона [Li и др., 2013]

Machine Translated by Google

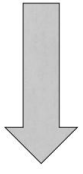
Обобщенные барицентрические координаты

• Координаты Вакспресса [Wachspress, 1975] •
Дискретные гармонические координаты [Pinkall и Polthier, 1993]
• Координаты среднего значения [Floater,
2003] • Метрические координаты [Malsch и
др., 2005] • Гармонические координаты [Joshi
и др., 2007] • Координаты максимальной энтропии [Hormann и
Sukumar, 2008] • Комплексные барицентрические
координаты [Weber и др., 2009] • Координаты наименьших квадратов
[Manson и Schaefer, 2010] • Координаты кубического
среднего значения [Li и Hu, 2013] • Координаты Пуассона [Li и др., 2013]

Machine Translated by Google

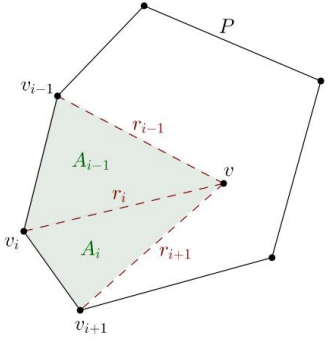
Обобщенные барицентрические координаты

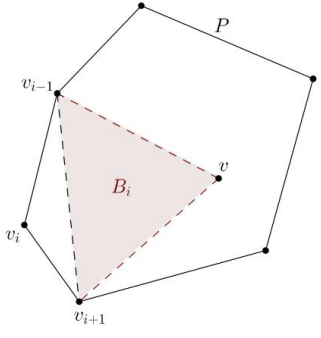
- Координаты Вакспресса [Wachspress, 1975] •
Дискретные гармонические координаты [Pinkall и Polthier, 1993]
- Координаты среднего значения [Floater, 2003]



- Трехточечные координаты [Floater et al., 2006]

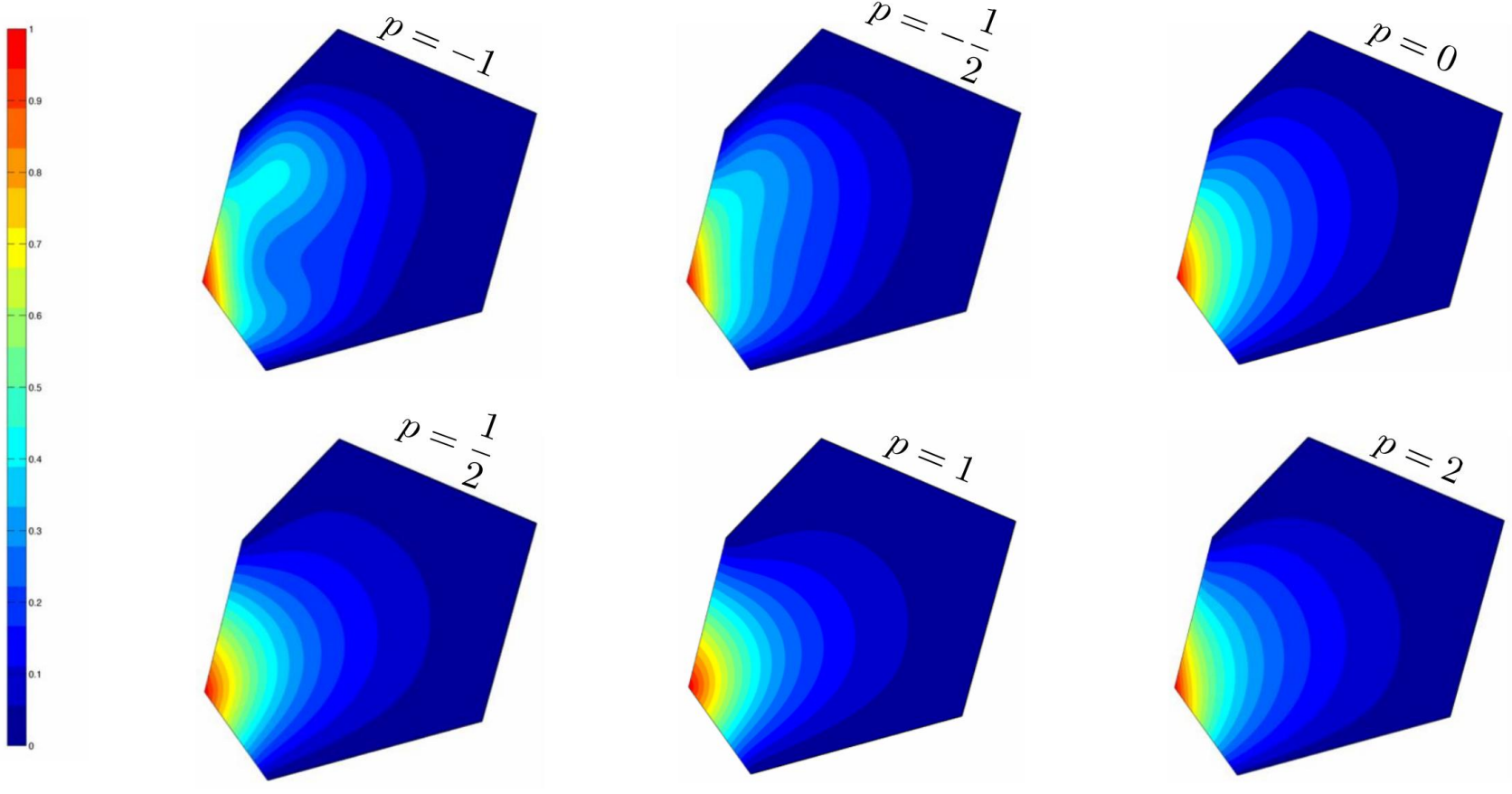
$$p \in \mathbb{R}, \qquad w_i = \frac{r_{i-1}^p A_i - r_i^p B_i + r_{i+1}^p A_{i-1}}{A_{i-1} A_i}$$





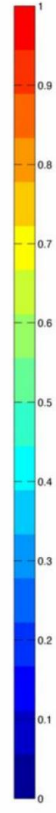
Machine Translated by Google

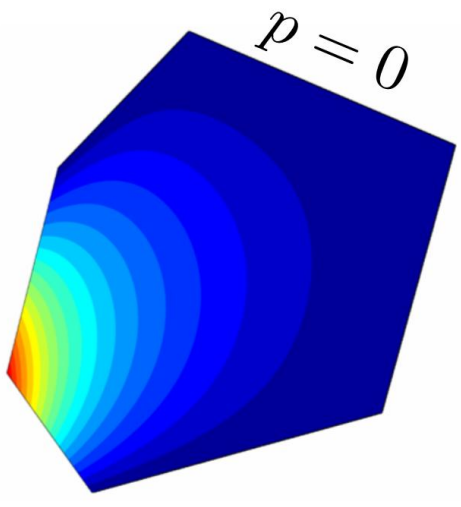
Трехточечные координаты



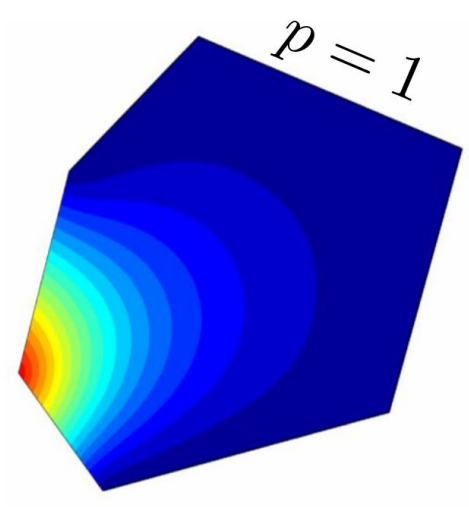
Machine Translated by Google

Трехточечные координаты

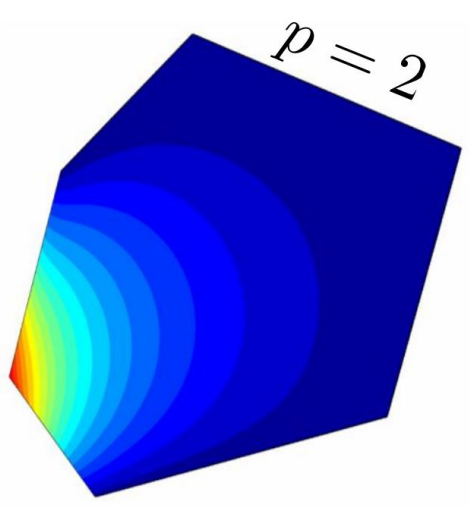




Вакспресс



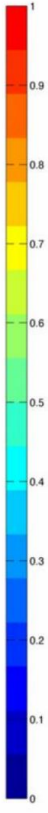
Среднее значение

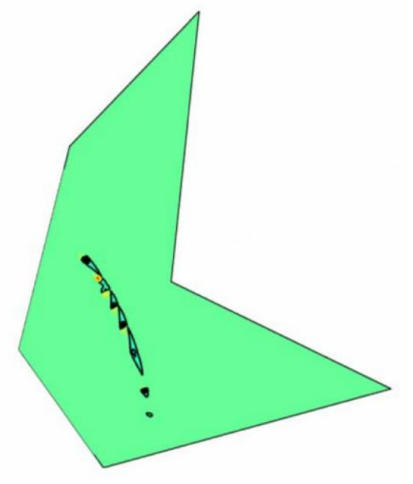


Дискретная гармоника

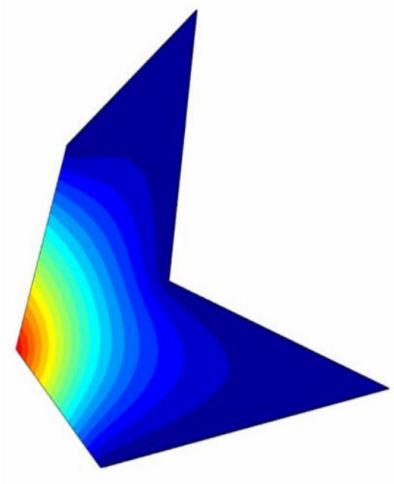
Machine Translated by Google

Трехточечные координаты

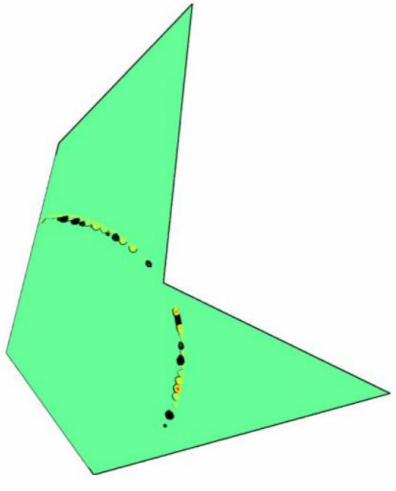




Вакспресс



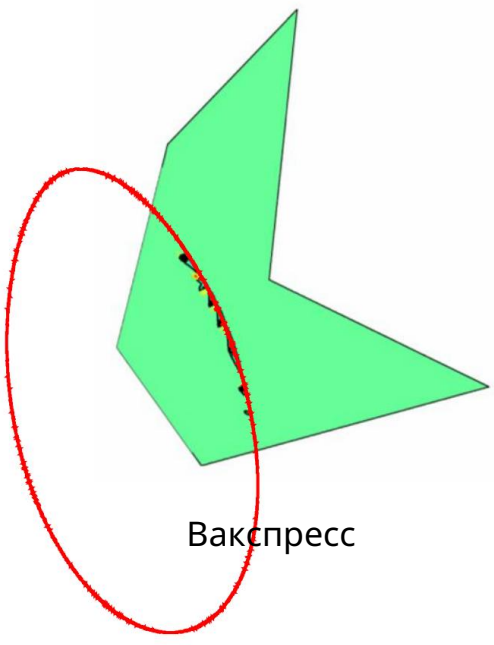
Среднее значение



Дискретная гармоника

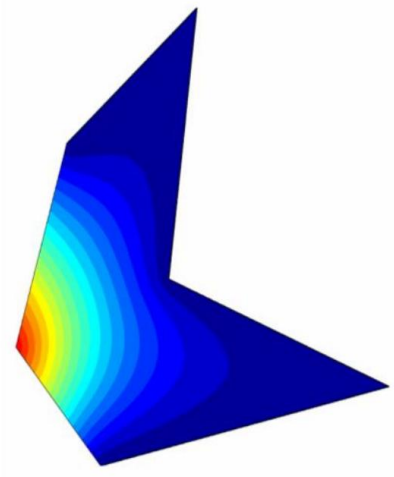
Machine Translated by Google

Трехточечные координаты



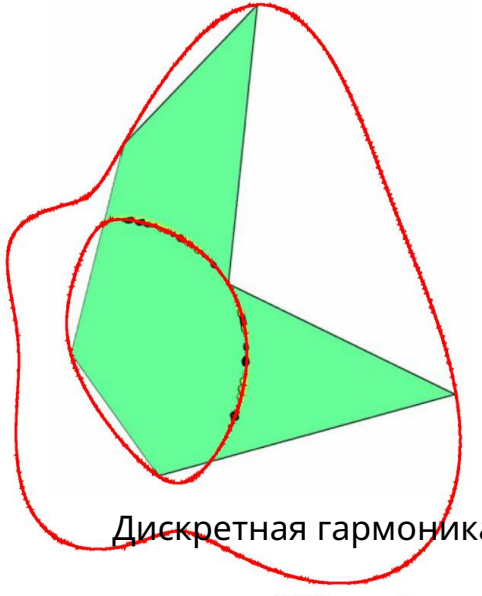
Вакспресс

$$W = 0$$



Среднее значение

$$b_i = \frac{w_i}{W}$$

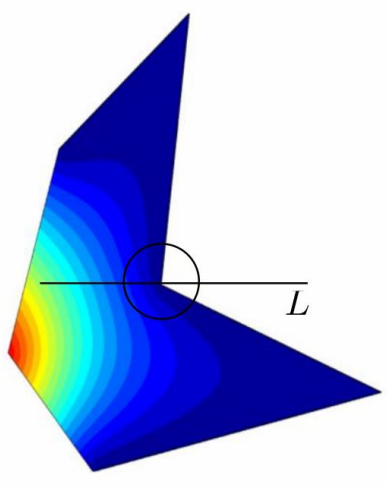


Дискретная гармоника

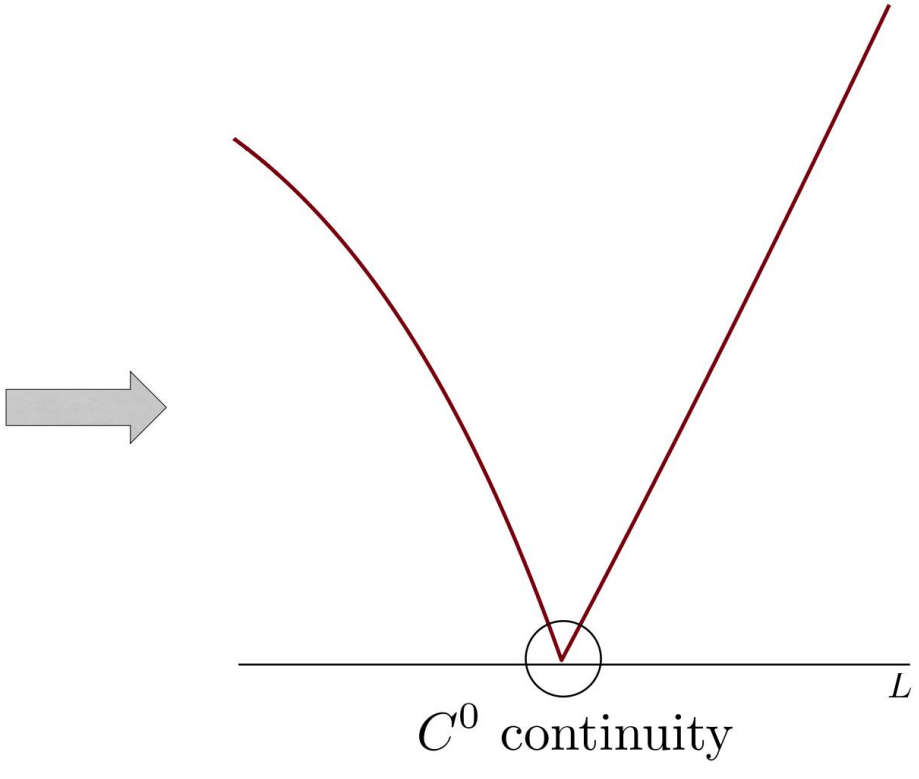
$$W = 0$$

Machine Translated by Google

Координаты среднего значения

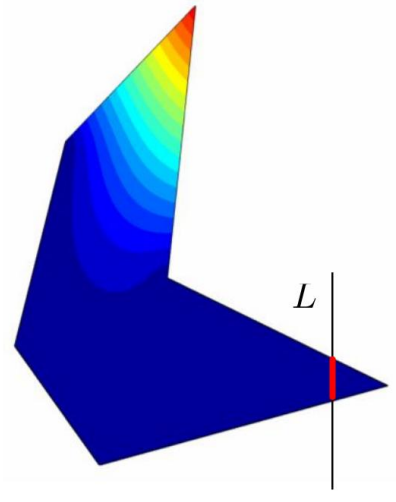


Среднее значение

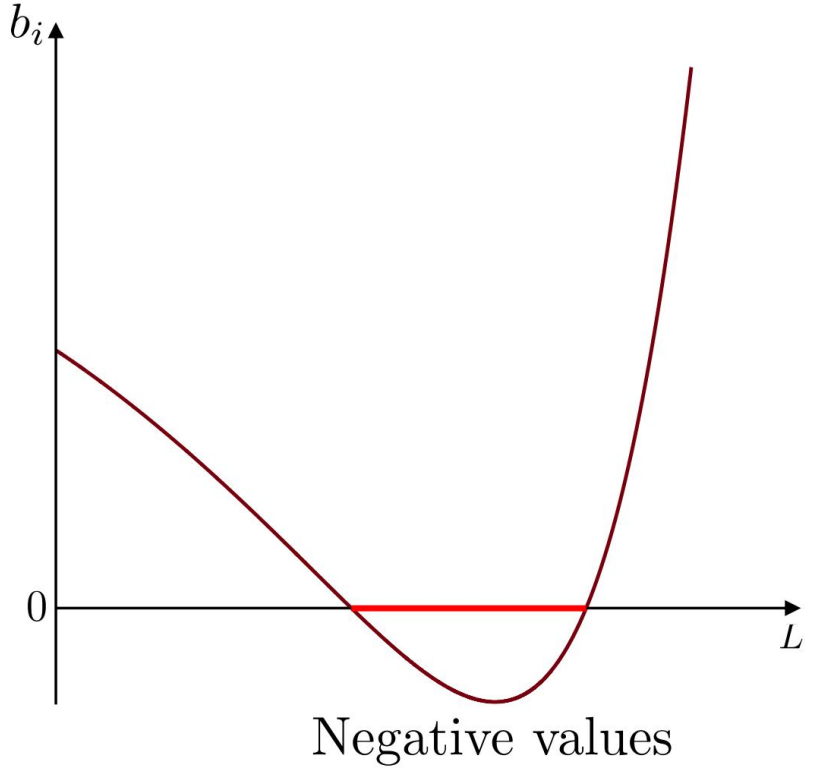


Machine Translated by Google

Координаты среднего значения Положительные координаты среднего значения [Липман и др., 2007]



Среднее значение



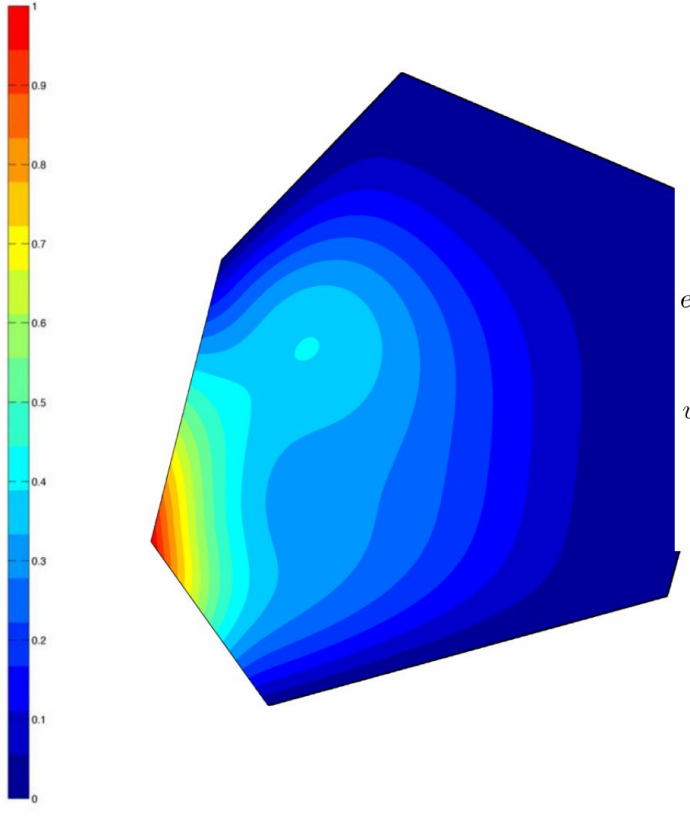
Machine Translated by Google

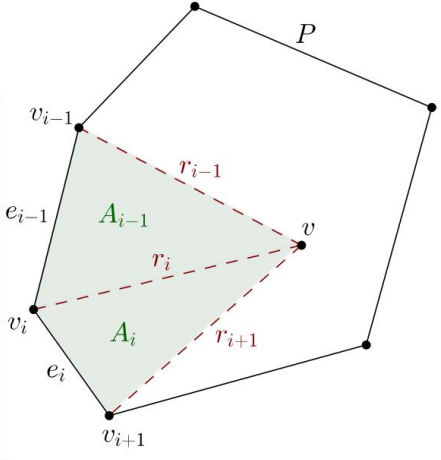
Обобщенные барицентрические координаты

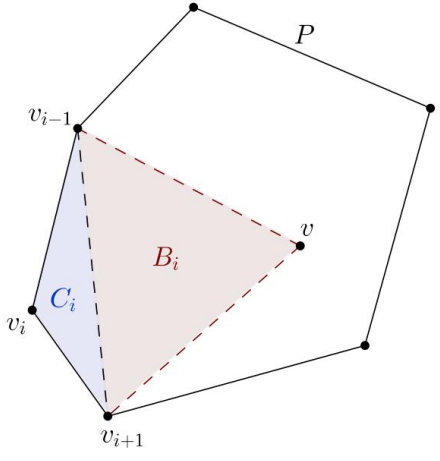
• Координаты Вакспресса [Wachspress, 1975] •
Дискретные гармонические координаты [Pinkall и Polthier, 1993]
• Координаты среднего значения [Floater,
2003] • Метрические координаты [Malsch и
др., 2005] • Гармонические координаты [Joshi
и др., 2007] • Координаты максимальной энтропии [Hormann и
Sukumar, 2008] • Комплексные барицентрические
координаты [Weber и др., 2009] • Координаты наименьших квадратов
[Manson и Schaefer, 2010] • Координаты кубического
среднего значения [Li и Hu, 2013] • Координаты Пуассона [Li и др., 2013]

Machine Translated by Google

Метрические координаты





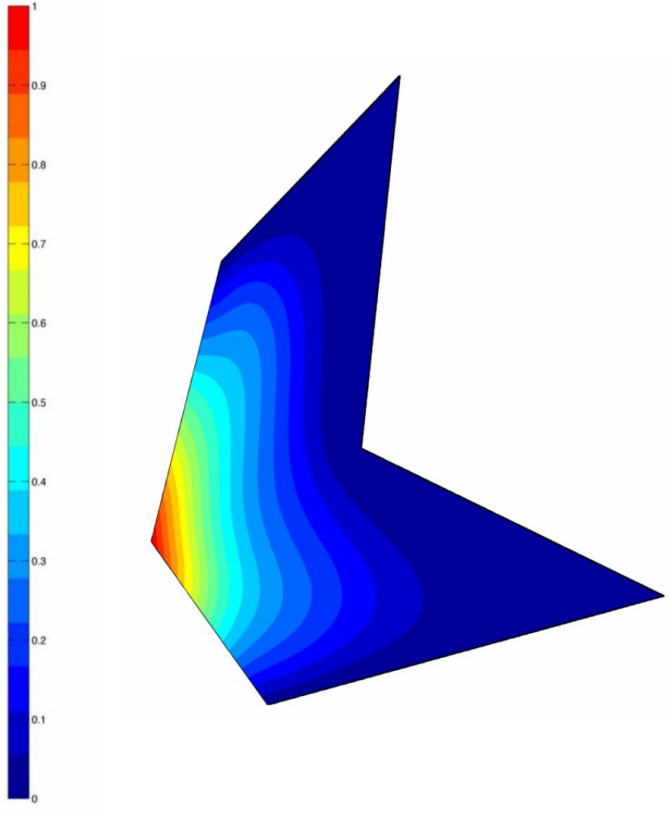


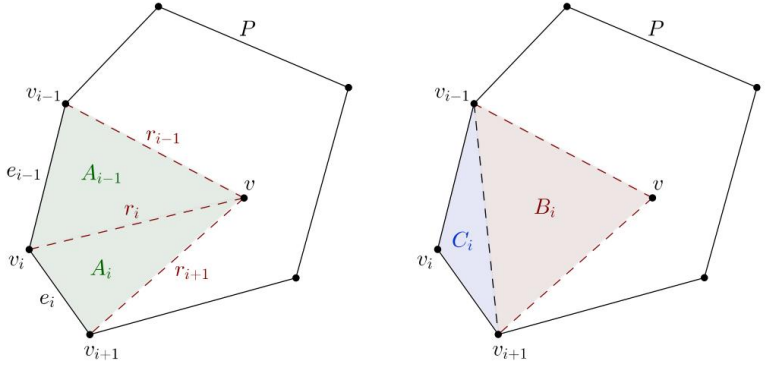
$$q_i = r_i + r_{i+1} - e_i$$

$$w_i = \frac{A_{i-2}}{C_{i-1}q_{i-2}q_{i-1}} - \frac{B_i}{C_i q_{i-1} q_i} + \frac{A_{i+1}}{C_{i+1}q_i q_{i+1}}$$

Machine Translated by Google

Метрические координаты



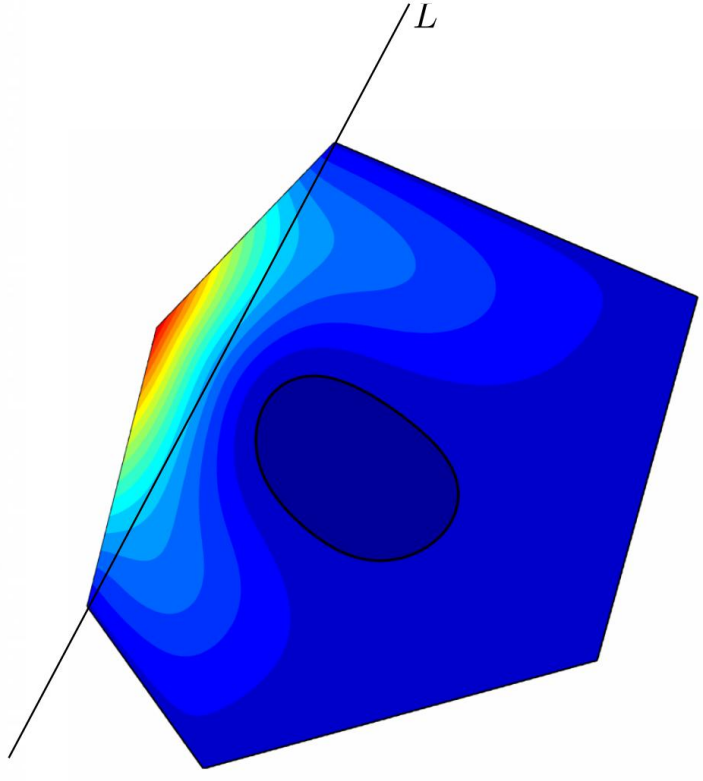


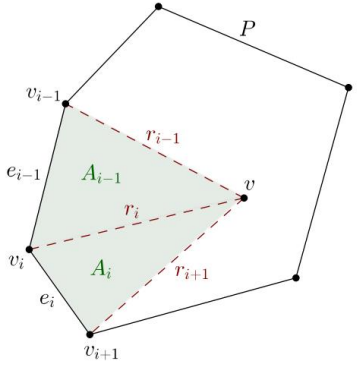
$$q_i = r_i + r_{i+1} - e_i$$

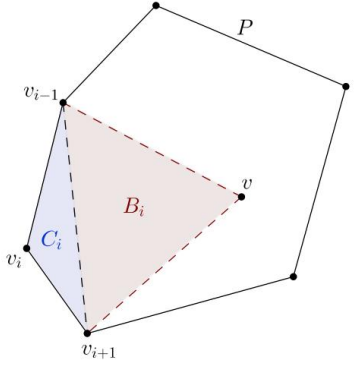
$$w_i = \frac{A_{i-2}}{C_{i-1}q_{i-2}q_{i-1}} - \frac{B_i}{C_i q_{i-1} q_i} + \frac{A_{i+1}}{C_{i+1}q_i q_{i+1}}$$

Machine Translated by Google

Метрические координаты





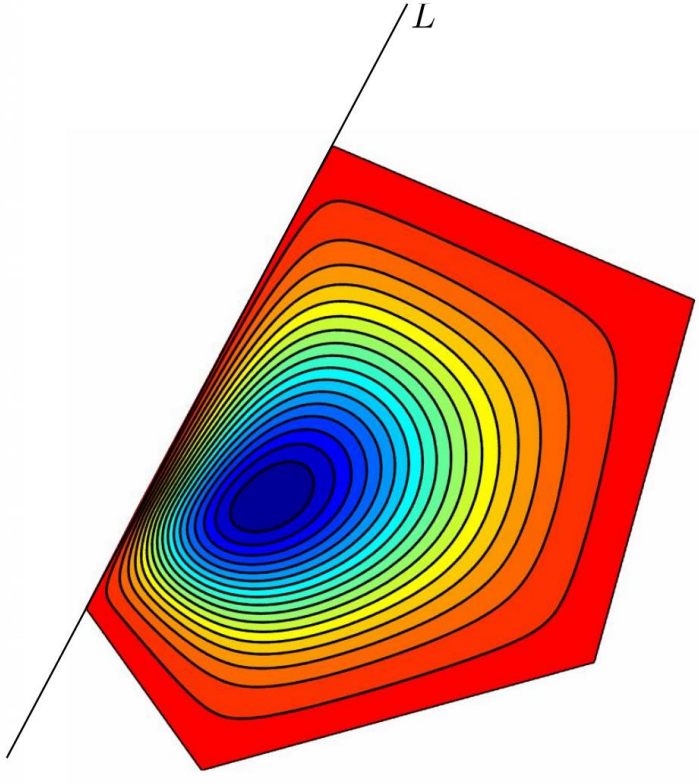


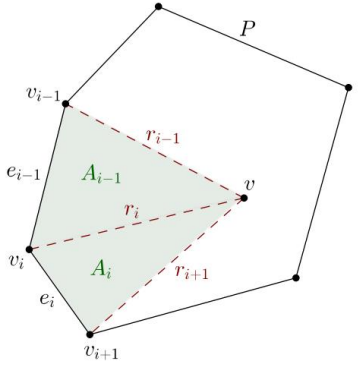
$$q_i = r_i + r_{i+1} - e_i$$

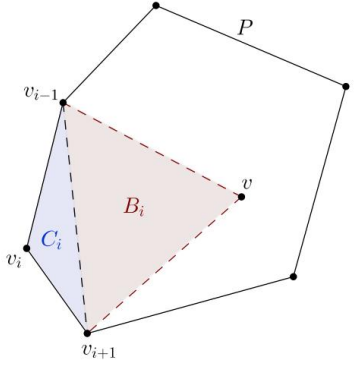
$$w_i = \frac{A_{i-2}}{C_{i-1}q_{i-2}q_{i-1}} - \frac{B_i}{C_i q_{i-1} q_i} + \frac{A_{i+1}}{C_{i+1}q_i q_{i+1}}$$

Machine Translated by Google

Метрические координаты







$$q_i = r_i + r_{i+1} - e_i$$

$$w_i = \frac{A_{i-2}}{C_{i-1}q_{i-2}q_{i-1}} - \frac{B_i}{C_i q_{i-1} q_i} + \frac{A_{i+1}}{C_{i+1}q_i q_{i+1}}$$

Machine Translated by Google

Обобщенные барицентрические координаты

• Координаты Вакспресса [Wachspress, 1975] •
Дискретные гармонические координаты [Pinkall и Polthier, 1993]
• Координаты среднего значения [Floater,
2003] • Метрические координаты [Malsch и
др., 2005] • Гармонические координаты [Joshi
и др., 2007] • Координаты максимальной энтропии [Hormann и
Sukumar, 2008] • Комплексные барицентрические
координаты [Weber и др., 2009] • Координаты наименьших квадратов
[Manson и Schaefer, 2010] • Координаты кубического
среднего значения [Li и Hu, 2013] • Координаты Пуассона [Li и др., 2013]

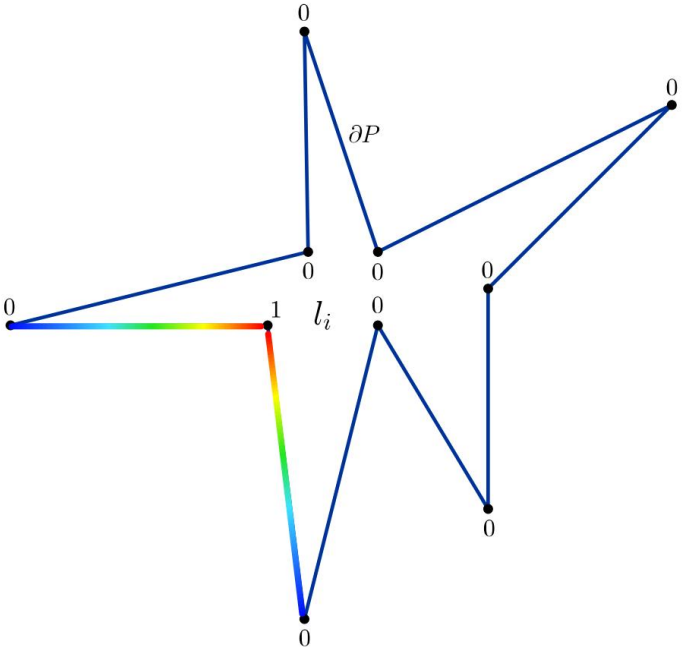
Machine Translated by Google

Гармонические координаты

Нет закрытой формы!

Solve the Laplacian equation:

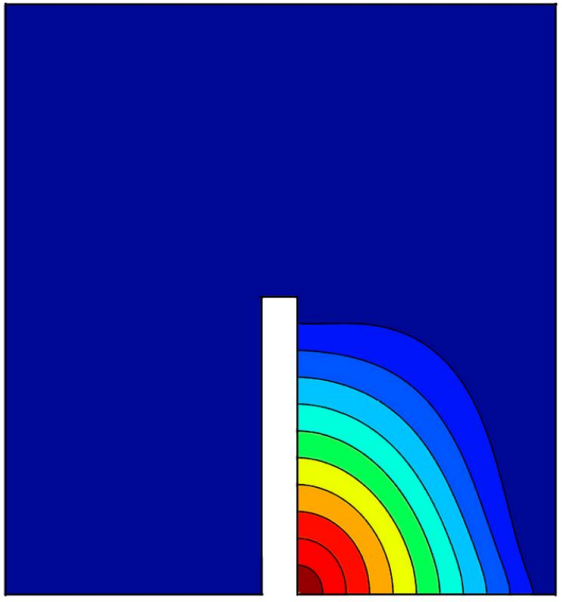
$$\Delta b_i = 0 \text{ s.t. } b_i|_{\partial P} = l_i$$



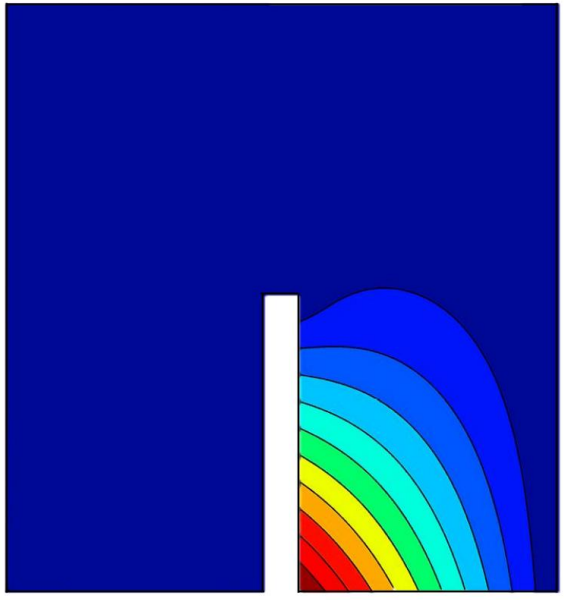
Machine Translated by Google

Бигармонический против гармонического

[Вебер и др., 2012]



Бигармонический



Гармонический

Machine Translated by Google

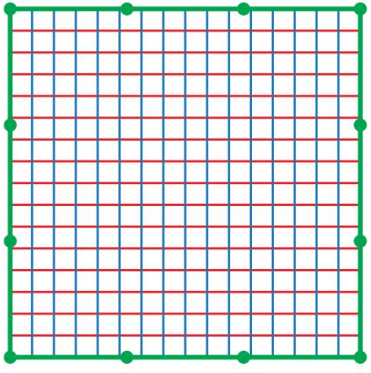
Обобщенные барицентрические координаты

• Координаты Вакспресса [Wachspress, 1975] •
Дискретные гармонические координаты [Pinkall и Polthier, 1993]
• Координаты среднего значения [Floater,
2003] • Метрические координаты [Malsch и
др., 2005] • Гармонические координаты [Joshi
и др., 2007] • Координаты максимальной энтропии [Hormann и
Sukumar, 2008] • Комплексные барицентрические
координаты [Weber и др., 2009] • Координаты наименьших квадратов
[Manson и Schaefer, 2010] • Координаты кубического
среднего значения [Li и Hu, 2013] • Координаты Пуассона [Li и др., 2013]

Machine Translated by Google

Барицентрическое картирование

Исходный полигон



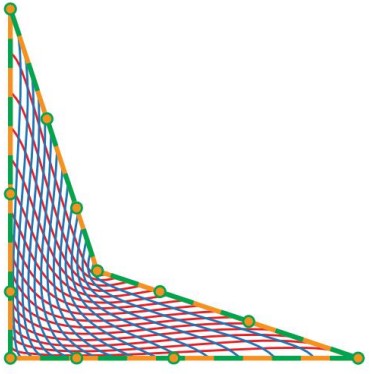
$$P = [v_1, \ldots, v_n]$$

$$v_i \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{For } v \in P:$$

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} b_i(v)\hat{v}_i$$

Целевой полигон



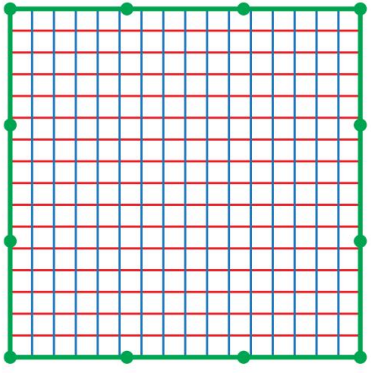
$$\hat{P} = [\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_n]$$

$$\hat{v}_i \in \mathbb{R}^2$$

Machine Translated by Google

Комплексное барицентрическое картирование

Исходный полигон



$$P = [z_1, \ldots, z_n]$$

$$z_i \in \mathbb{C}$$

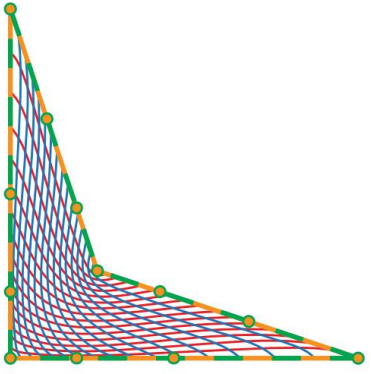
$$\text{For } z \in P:$$

$$g(z) = \sum_{i=1}^{n} c_i(z)\hat{z}_i$$

with complex
barycentric coordinates

$$c_i : P \to \mathbb{C}$$

Целевой полигон



$$\hat{P} = [\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n]$$

$$\hat{z}_i \in \mathbb{C}$$

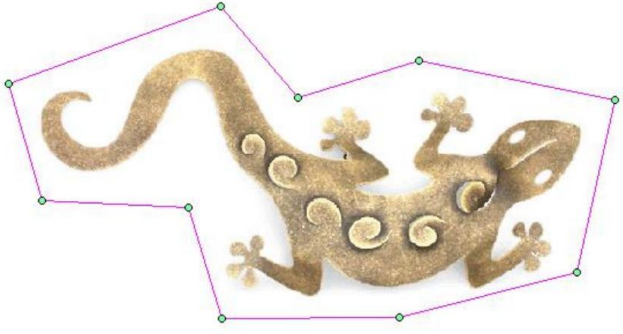
Machine Translated by Google

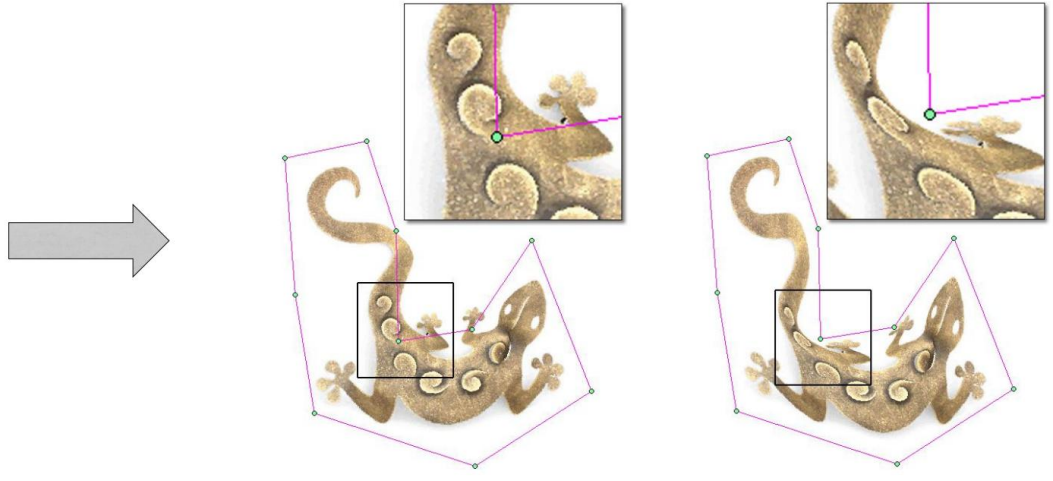
Комплексные барицентрические координаты

Трехточечные координаты обобщаются до комплексных трехточечных координат.

Зеленые координаты являются членами сложных трехточечных координат [Липман и др., 2008]

Индуцировать конформные отображения





Зеленый

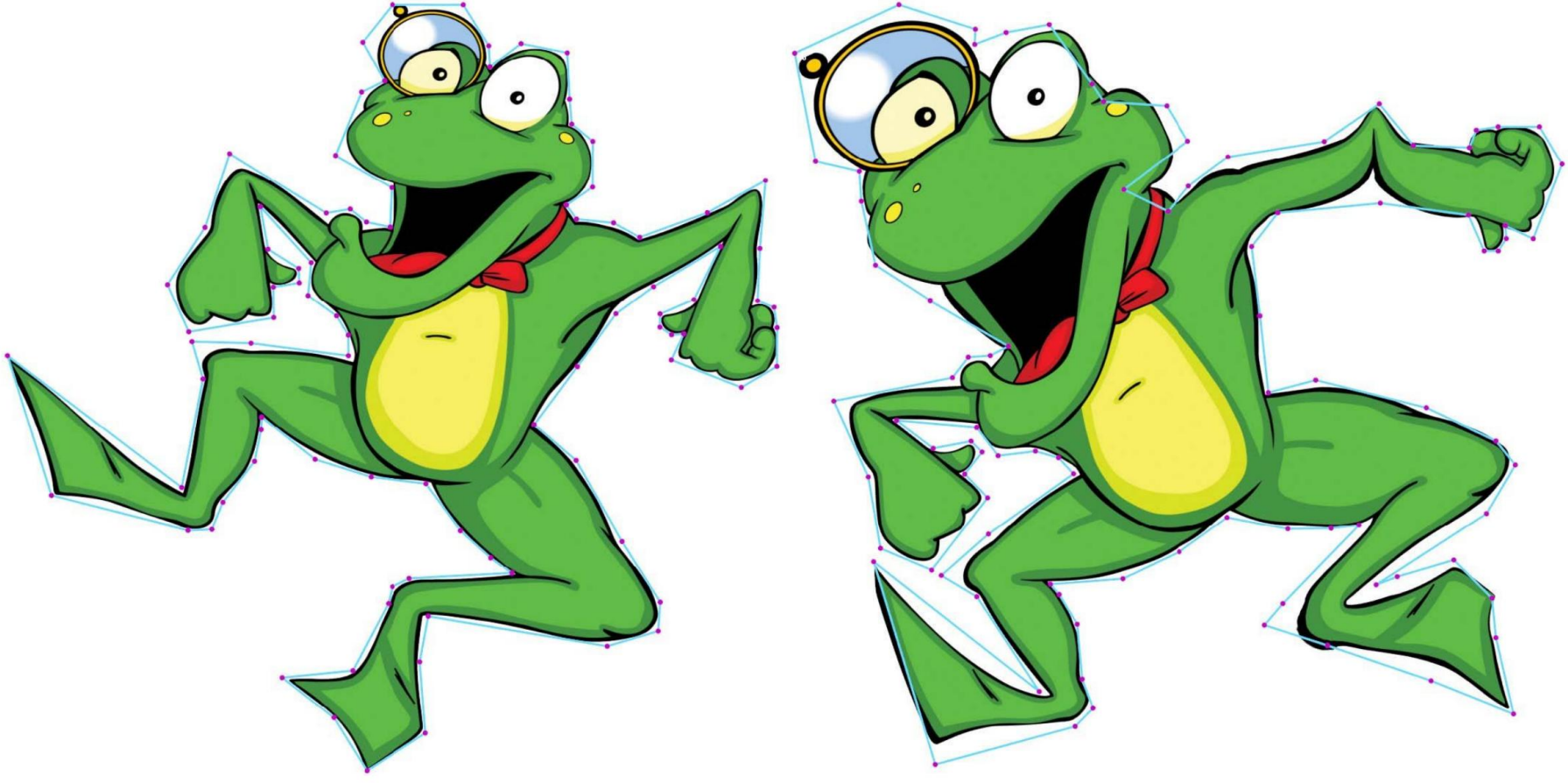
Гармонический

Machine Translated by Google

ПРИЛОЖЕНИЯ

Machine Translated by Google

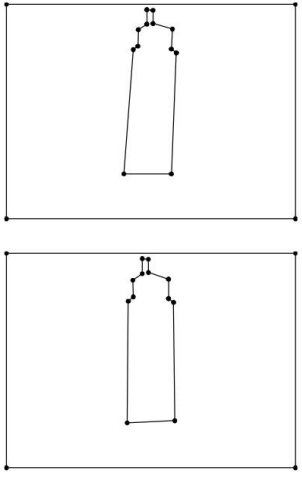
Редактирование



Machine Translated by Google

Искажение изображения

Исходное изображение



Маска

Искаженное изображение